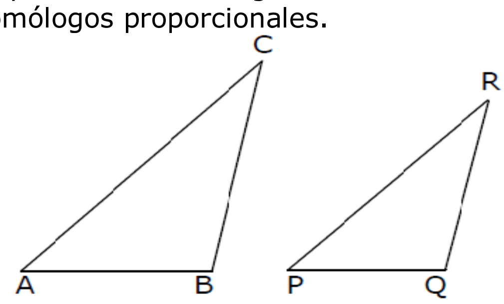
GUIA MATEMATICA

¿Qué aprenderé?
1. Conocer concepto y propiedades de semejanza de triángulos.
2. Aplicar las propiedades de semejanza
3. Resolver problemas que involucran semejanza de figuras planas.

DEFINICIÓN DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos, se dirán semejantes, cuando los ángulos de uno de ellos sean respectivamente congruentes con los ángulos del otro y cuando además, tengan sus lados homólogos proporcionales.



$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ **si y solamente si**
$\measuredangle A \cong \measuredangle P$, $\measuredangle B \cong \measuredangle Q$, $\measuredangle C \cong \measuredangle R$
y
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{RP}}$$

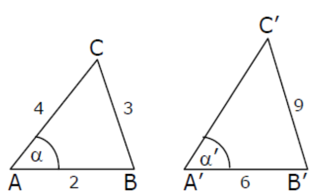
OBSERVACIONES

- Esta definición encierra la idea de similitud de forma: es decir, dos triángulos son semejantes, si y sólo si tienen la misma forma pero no necesariamente el mismo tamaño.
- Dos polígonos de un mismo número de lados, se dirán **semejantes**, cuando los ángulos de uno de ellos sean respectivamente congruentes con los ángulos del otro y cuando además, tengan sus lados homólogos proporcionales.

¿Qué relación existe entre la semejanza y la congruencia de figuras planas?

Aplico la definición anterior en los ejemplos siguientes:

1. Si en la figura 1, ΔABC ~ ΔA'B'C', entonces α es
A) igual a α'
B) un cuarto de α'
C) un tercio de α'
D) el doble de α'
E) el triple α'



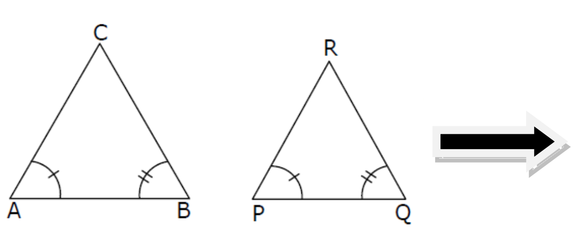
2. Los lados de un triángulo miden 30 cm, 50 cm y 60 cm. ¿Cuánto mide el lado más largo de un triángulo semejante con él y cuyo lado menor mide 20 cm?
A) 30 cm
B) 40 cm
C) 50 cm
D) 60 cm
E) 70 cm

TEOREMAS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Para establecer la semejanza entre dos triángulos no es necesario verificar cada una de las seis condiciones expuestas anteriormente, sino que la ocurrencia de algunas de ellas provocan necesariamente la ocurrencia de las otras restantes.

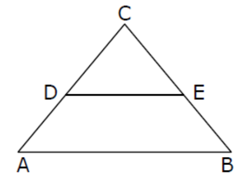
TEOREMA 1: (TEOREMA FUNDAMENTAL)

Para que dos triángulos sean semejantes, los ángulos de uno de ellos deben ser congruentes a los ángulos del otro.



Si $\measuredangle A \cong \measuredangle P$ **y** $\measuredangle B \cong \measuredangle Q$**,**
entonces
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

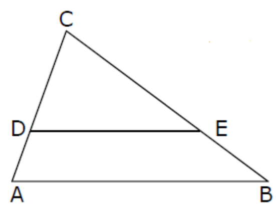
Dado el triángulo ABC, con $\overline{DE}//\overline{AB}$, ¿puedo concluir que los triángulos ΔCDE y ΔCAB son semejantes? Justifico mi respuesta y anoto mis conclusiones



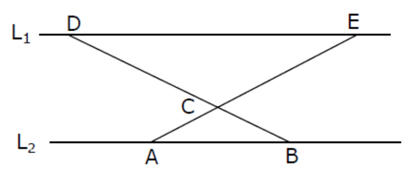
____
____
____
____

Aplico el teorema anterior en los ejemplos siguientes:

1. En la figura, el trazo DE es paralelo al lado AB del triángulo ABC. Entonces, el triángulo CDE es semejante al triángulo ABC en su orden
A) BAC
B) CBA
C) CAB
D) BCA
E) ABC



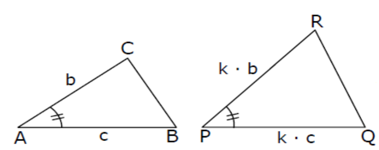
2. Las rectas L1 y L2 de la figura, son paralelas y los trazos DB y AE se cortan en C.
Entonces, el triángulo ABC es semejante al triángulo DEC en su orden
A) DCE
B) EDC
C) DEC
D) ECD
E) CED



MÁS TEOREMAS

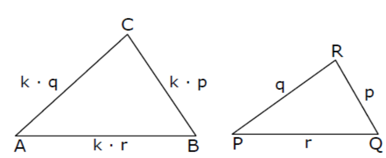
TEOREMA 2: LAL
Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan **un ángulo congruente comprendido entre lados proporcionales**.

$$\text{Si } \measuredangle A \cong \measuredangle P \text{ y } \frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}, \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta PQR$$



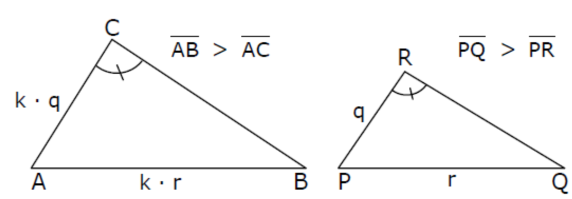
TEOREMA 3: LLL
Para que dos triángulos sean semejantes, basta que tengan sus **lados proporcionales**.

$$\text{Si } \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{RP}}, \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta PQR$$



TEOREMA 4: LLA
Para que dos triángulos sean semejantes, basta que **tengan dos de sus lados respectivamente proporcionales, y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, congruentes.**

$$\text{Si } \measuredangle C \cong \measuredangle R \text{ y } \frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}, \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta PQR$$



Aplico el teorema anterior en los ejemplos siguientes:

1. Sea $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ y las longitudes de los lados sean las indicadas en la figura 4. ¿Cuál es la longitud de $(x + y)$?

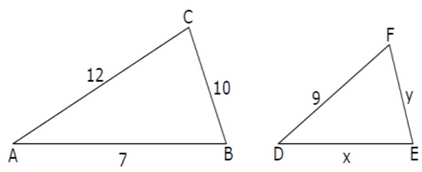
A) $\frac{21}{4}$

B) $\frac{27}{4}$

C) $\frac{30}{4}$

D) $\frac{51}{4}$

E) $\frac{61}{4}$



2. Según los datos dados en la figura 5, ¿cuál es la longitud de $\overline{AC}$ si $\frac{AB}{PR} = \frac{BC}{PQ}$?

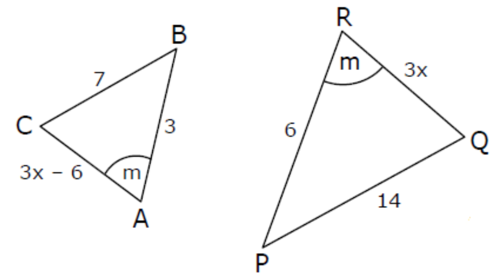
A) 10

B) 8

C) 6

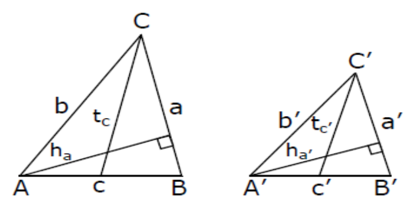
D) 3,9

E) 1,3



TEOREMA 5:
En triángulos semejantes, dos lados homólogos están en la misma razón que dos trazos homólogos cualesquiera y también están en la misma razón que sus perímetros.

$$\boxed{\frac{b}{b'} = \frac{t_c}{t_{c'}} = \frac{h_a}{h_{a'}} = \frac{\text{Perímetro } \Delta ABC}{\text{Perímetro } \Delta A'B'C'} = \ldots.}$$



TEOREMA 6:
Las áreas de triángulos semejantes están en una razón equivalente al cuadrado de la razón en que se encuentran dos trazos homólogos cualesquiera.

$$\boxed{\frac{\text{Área } \Delta ABC}{\text{Área } \Delta A'B'C'} = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{t_c}{t_{c'}}\right)^2 = \left(\frac{h_a}{h_{a'}}\right)^2 = \ldots.}$$

Aplico el teorema anterior en los ejemplos siguientes:

1. En la figura 2, el trazo DE es paralelo al lado AB del triángulo ABC. ¿Cuál es el perímetro del ΔCDE?

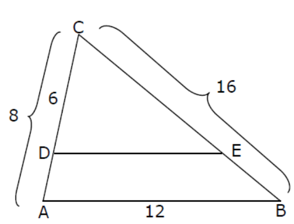
A) 36

B) 32

C) 27

D) 21

E) 18



2. Los triángulos ABC y A’B’C’ de la figura 3, son **semejantes**. S y S’ representan las áreas del primer y segundo triángulo respectivamente. Si S : S’ = 1 : 4, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **falsa(s)**?

I) a : a’ = 1 : 2 II) hc : hc’ = 1 : 4 III) hc : hc’ = tc : tc’

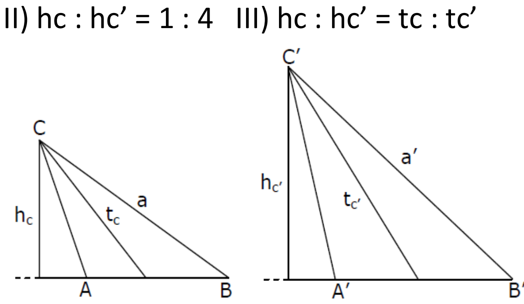
A) Sólo I

B) Sólo II

C) Sólo III

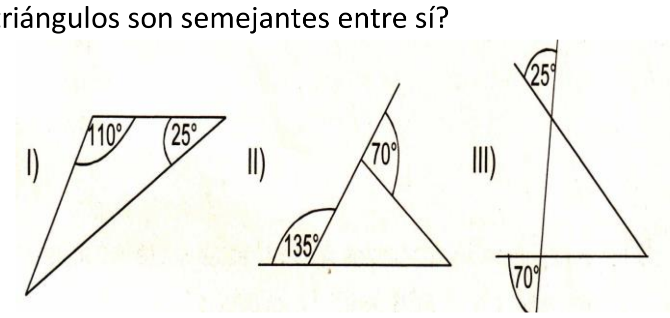
D) Sólo I y III

E) I, II y III

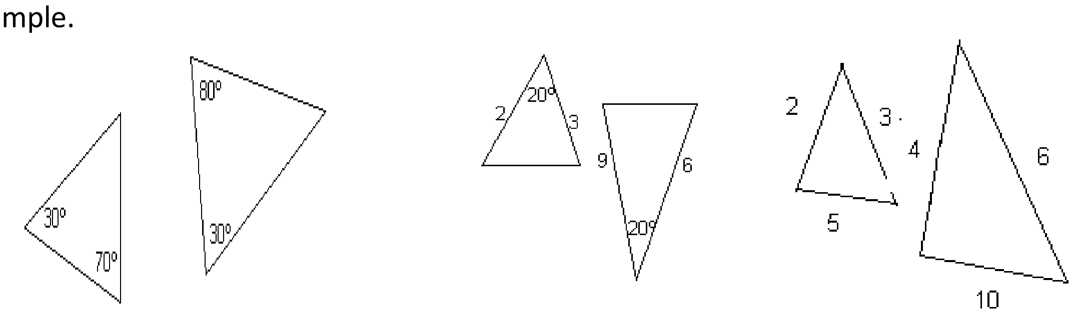


En los siguientes ejercicios aplico los teoremas enseñados:

1) ¿Cuáles de los siguientes triángulos son semejantes entre sí?



2. ¿Cuál de los siguientes triángulos son semejantes? En caso de serlos indico el criterio que se cumple.



3. Los lados de un triángulo miden 24 m., 18m. y 36 m., respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12m., 16 m. y 24 m., respectivamente. Determino si son o no semejantes, justificando mi respuesta.

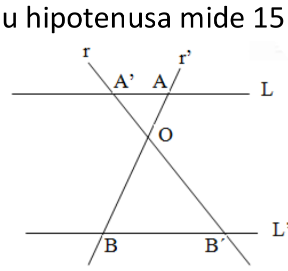
4. Los lados de un triángulo miden 36 m., 42 m. y 54 m., respectivamente. Si en un triángulo semejante a éste, el lado homólogo del primero mide 24 m. Encuentro los otros dos lados de este triángulo.

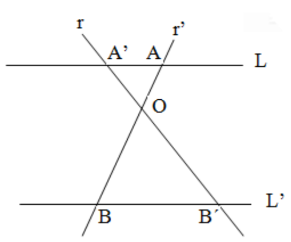
5. ¿Cuál es la altura del faro de la figura de acuerdo a la información entregada?

6. La razón de semejanza del triángulo ABC con el triángulo A'B'C' es 3:4. Si los lados del primero son 18, 21 y 30, determino los lados del segundo.

7. Los lados de un triángulo rectángulo miden 6 m., 8 m. y 10 m. respectivamente. ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero si su hipotenusa mide 15 m.?

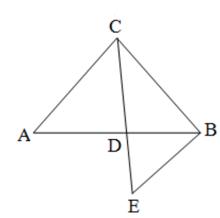
8. Si L//L', r y r' secantes que se cortan en O. Demuestro que $\Delta OAA' \sim \Delta OBB'$.

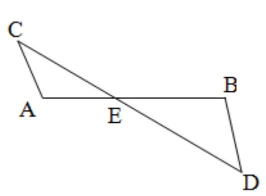




9. Si L//L', r y r' secantes que se cortan en O y OA = 8 cm., OB = 12 cm., AA' = 10 cm., A'B' = 15 cm. Determino OB' y BB'.

10. Si en el ΔABC, CD es la bisectriz del $\angle ACB$ y $\angle ABE \cong \angle ACD$, demuestro que $\Delta ACD \sim \Delta DBE$ y que $\Delta ADC \sim \Delta CEB$.





11. Si los segmentos AB y CD se cortan en un punto E tal que $CE \cdot EB = ED \cdot AE$, demuestro que los segmentos AC y BD que unen sus extremos, son paralelos.

12. Encuentro el valor de $\overline{AD}$ si $\overline{AC} = 25$