Semejanza de triángulos

PPTCES026MT22-A15V1

Aprendizajes esperados

- Comprender el concepto de semejanza en figuras planas y relacionarlo con las transformaciones isométricas.

- Aplicar criterios de semejanza en triángulos para la resolución de problemas y demostración de propiedades.

1. Semejanza

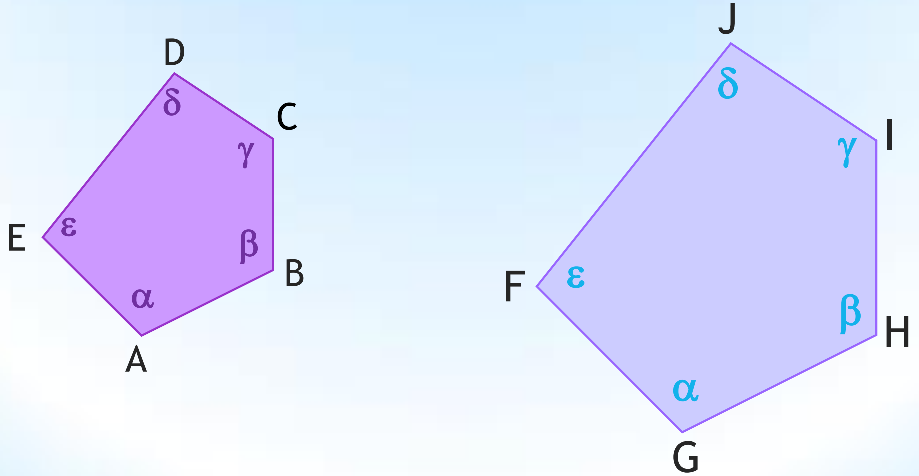
Definición

Para que dos polígonos sean semejantes es necesario que se cumplan dos condiciones:

1° que tengan sus **ángulos** respectivamente **congruentes**, y

2° que sus **lados homólogos** sean **proporcionales**.

Así tendrán igual forma, pero no necesariamente igual tamaño y área.

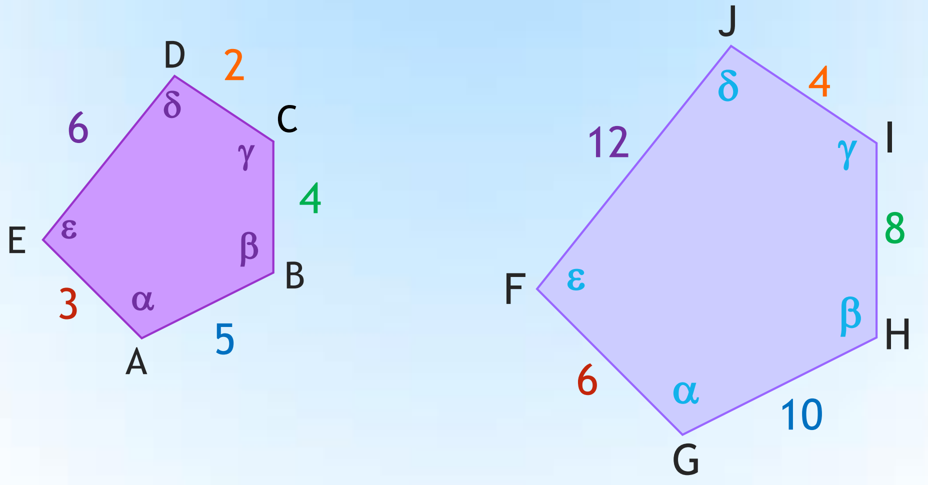


Se llaman lados homólogos a los lados que unen dos vértices con ángulos respectivamente congruentes.

1. Semejanza

Ejemplo:

En los siguientes hexágonos, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{GH}$ son homólogos, como también lo son, $\overline{BC}$ y $\overline{HI}$, $\overline{CD}$ e $\overline{IJ}$, $\overline{DE}$ y $\overline{JF}$, $\overline{EA}$ y $\overline{FG}$.



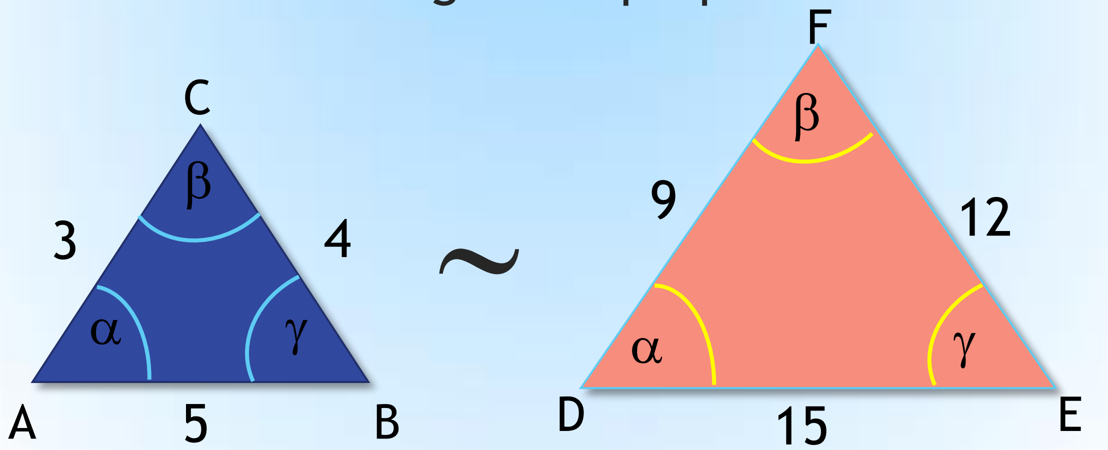
Además, en este caso, están en la razón 1 : 2.

1. Semejanza

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes, y sus lados homólogos son proporcionales.

Ejemplo:



$\overline{AB}$ es homólogo a $\overline{DE}$
$\overline{BC}$ es homólogo a $\overline{EF}$
$\overline{AC}$ es homólogo a $\overline{DF}$

Los lados homólogos están en razón 1 : 3 = k

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{1}{3} = k$$

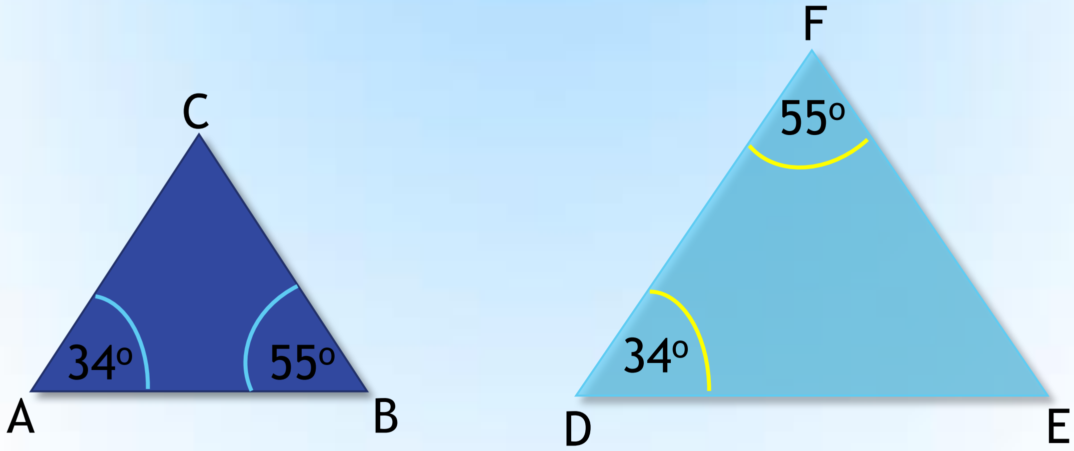
Recuerda que al establecer una semejanza, el orden no se debe alterar.

2. Criterios de semejanza

1° Criterio AA

- *Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.*

Ejemplo:



$\Delta ABC \sim \Delta DFE$ por: **AA**

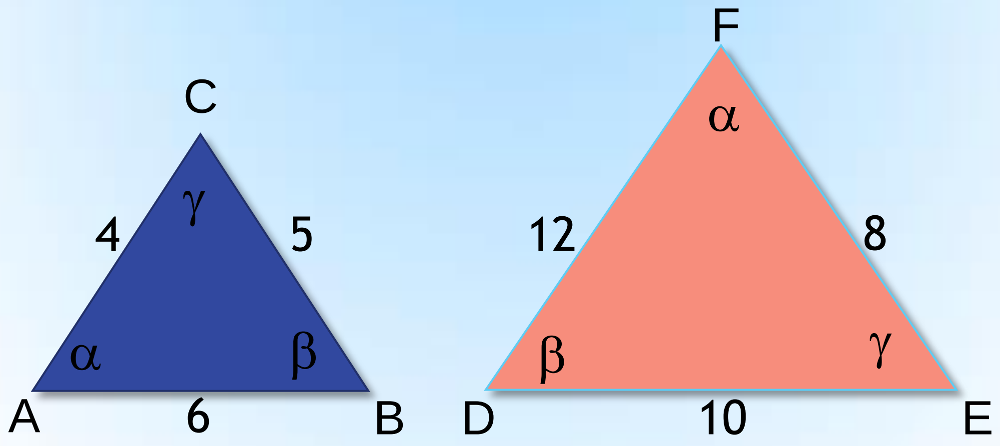
Además, $\dfrac{AB}{DF} = \dfrac{BC}{FE} = \dfrac{AC}{DE} = k$

2. Criterios de semejanza

2° Criterio LLL

- *Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.*

Ejemplo:



$\Delta ABC \sim \Delta FDE$ por **LLL**

$$\frac{AB}{FD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{FE} = \frac{1}{2} = k$$

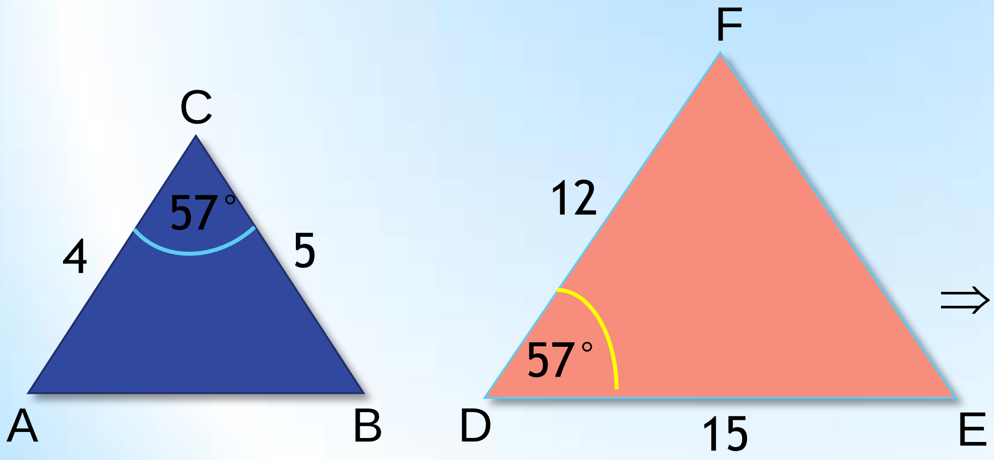
Además, $\angle BAC = \angle DFE$, $\angle CBA = \angle EDF$ y $\angle ACB = \angle FED$

2. Criterios de semejanza

3° Criterio LAL

- *Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos congruente.*

Ejemplo:



$\Delta ABC \sim \Delta FED$ por **LAL**

$$\frac{AC}{FD} = \frac{BC}{ED}$$

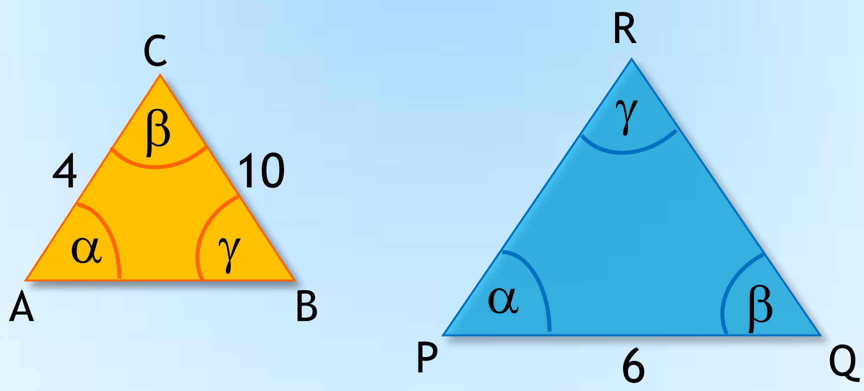
$$\Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = k$$

Además, $\angle BAC = \angle DFE$ y $\angle CBA = \angle FED$

2. Criterios de semejanza

Aplicación:

Determinar la medida del lado QR, en el triángulo PQR de la figura:



Solución:

Los triángulos de la figura son semejantes por **AA**, $\Delta ABC \sim \Delta PRQ$.

Entonces:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PQ}} = k$$

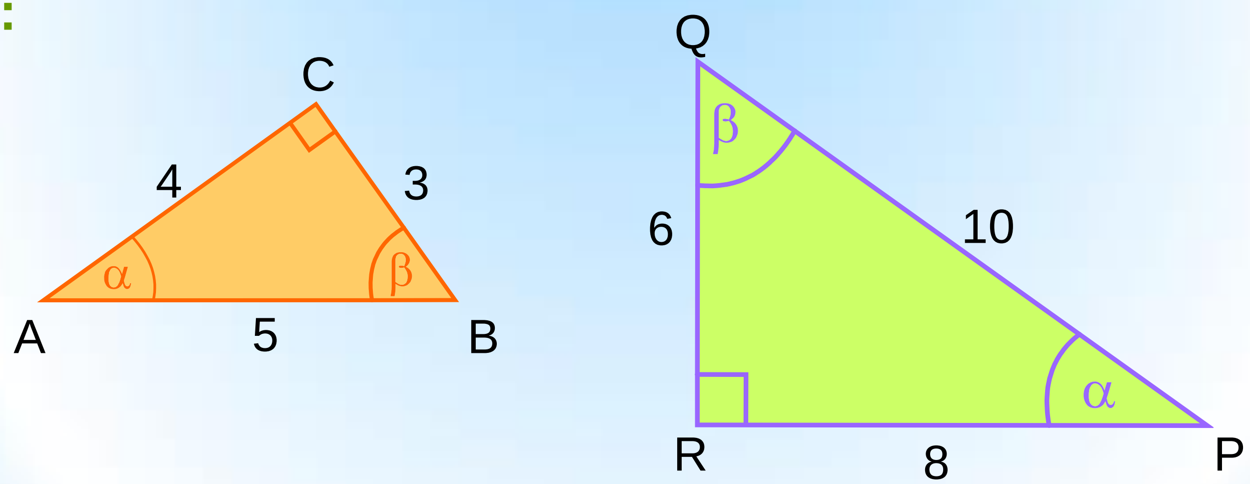
Con k, razón de semejanza

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PR}} = \frac{10}{\overline{QR}} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow \frac{10}{\overline{QR}} = \frac{4}{6} \quad \Rightarrow 60 = 4 \cdot \overline{QR} \quad \Rightarrow \boxed{15 = \overline{QR}}$$

3. Elementos homólogos

En triángulos semejantes, los elementos secundarios homólogos como alturas, transversales, bisectrices , simetrales y medianas, también son proporcionales y están en la misma razón que sus lados homólogos.

Ejemplo:

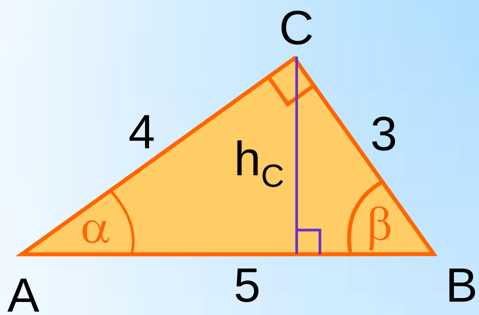


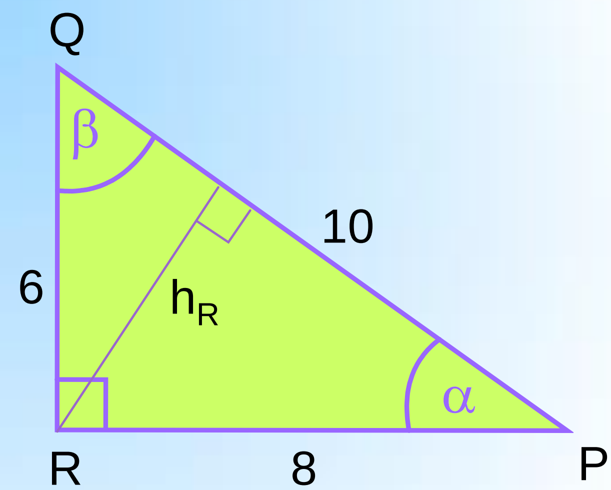
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{RP}} = k \quad \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = k \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

K: razón de semejanza

3. Elementos homólogos

Por otro lado,





Por **Teorema de Euclides**

$$h_C = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

$$h_R = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$$

Luego, las alturas también están en razón 1:2.

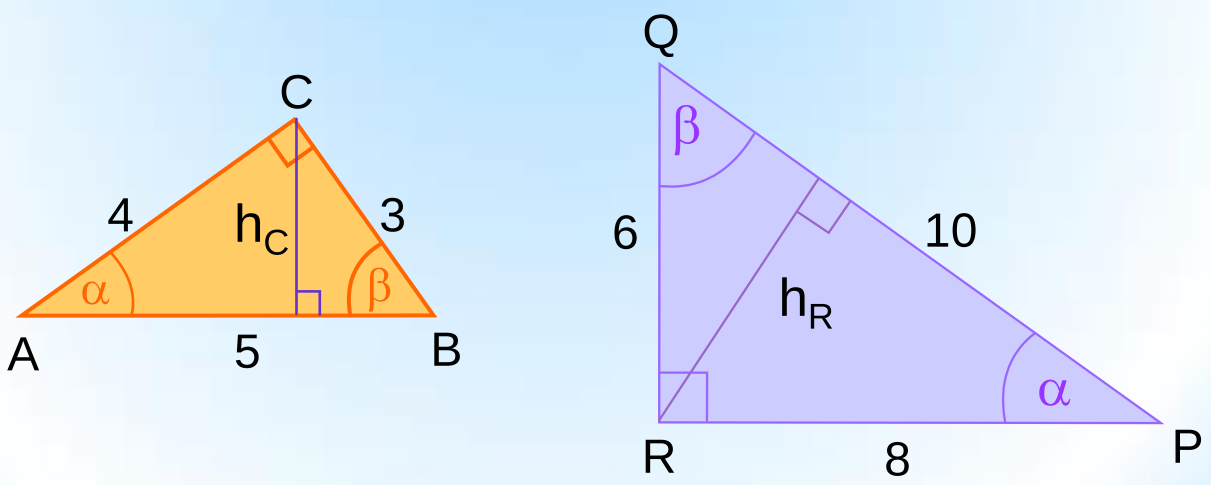
$$\frac{h_C}{h_R} = \frac{2{,}4}{4{,}8} = \frac{1}{2} = k$$

3. Elementos homólogos

Razón entre áreas y perímetros

- *La razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes, es igual a la razón entre sus elementos homólogos.*

Ejemplo:



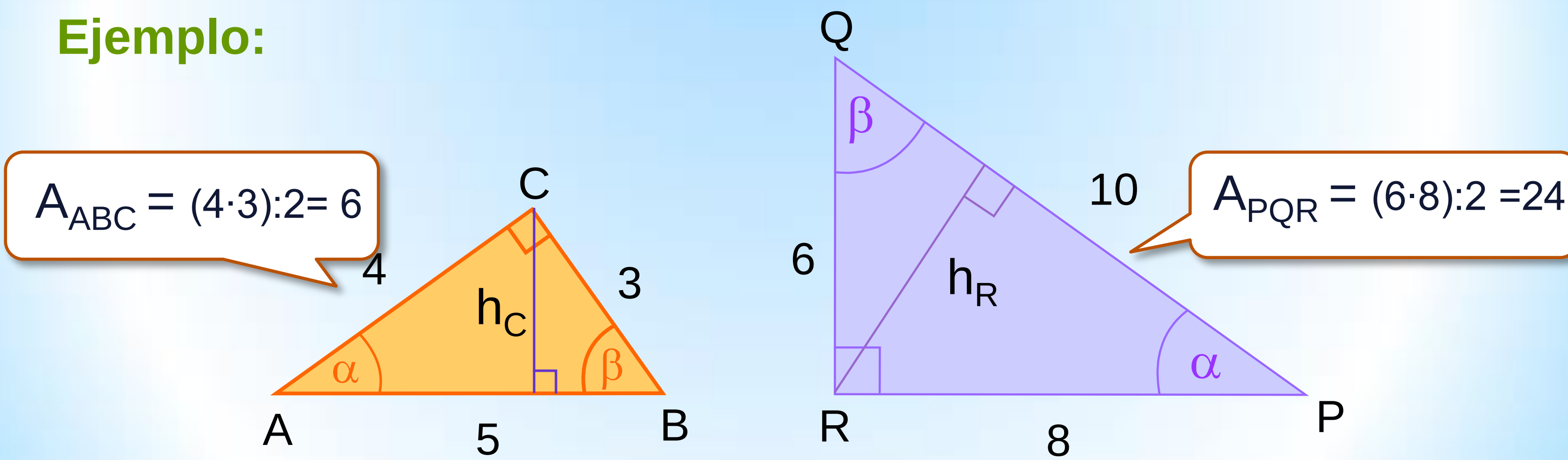
$$\frac{P_{ABC}}{P_{PQR}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = k$$

3. Elementos homólogos

Razón entre áreas y perímetros

- *La razón entre las áreas de dos triángulos semejantes, es igual al cuadrado de la razón entre sus elementos homólogos.*

Ejemplo:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = k$$

$$\frac{A_{ABC}}{A_{PQR}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = k^2$$

Síntesis de la clase

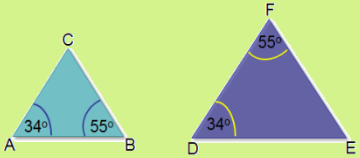
Semejanza ~

- **Ángulos** respectivos **congruentes**
- **Lados homólogos proporcionales**

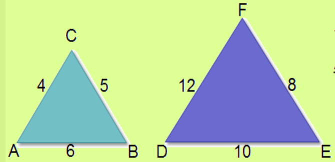
Triángulos Semejantes

Criterios de Semejanza

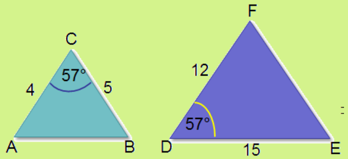
1° Criterio AA



2° Criterio LLL

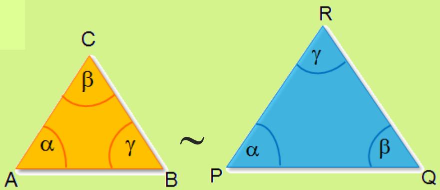


3° Criterio LAL



Elementos homólogos

Lados proporcionales



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PQ}} = k$$

Alturas

$$\frac{h_C}{h_Q} = k$$

Áreas

$$\frac{A_{ABC}}{A_{PRQ}} = k^2$$