Probabilidades

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Definir el concepto de probabilidad

- Resolver problemas que involucren probabilidad "clásica" , total o condicionada.

- Aplicar las propiedades de las probabilidades en la resolución de problemas.

Contenidos

4. Propiedades básicas

4.1 Suceso A ó Suceso B

- Caso 1. Si son mutuamente excluyentes
- Caso 2. Si no son mutuamente excluyentes

4.2 Suceso A y Suceso B

- Caso 1. Si son independientes
- Caso 2. Si son dependientes

4.3 Probabilidad con reposición

4.4 Probabilidad sin reposición

1. Probabilidades

1.1 Definición

El concepto de probabilidad se encuentra con frecuencia en la comunicación entre las personas. Por ejemplo:

1) Pilar y Álvaro tienen un 50% de probabilidades de viajar juntos al extranjero.

2) Los alumnos de Cpech tienen un 95% de probabilidades de ingresar a la universidad.

En los ejemplos, se da la “medida” de la ocurrencia de un evento que es incierto (sobrevivir a la operación, o ingresar a la universidad), y ésta se expresa mediante un número entre 0 y 1, o en porcentaje.

Intuitivamente podemos observar que cuanto más probable es que ocurra el evento, su medida de ocurrencia estará más próximo a "1" o al 100%, y cuando menos probable, más se aproximará a "0".

De aquí se deduce que un hecho o evento que **NO** puede ocurrir tendrá probabilidad **cero** y uno cuya probabilidad es segura tendrá probabilidad **uno**.

Luego, si A representa un evento o suceso, se cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

1.2 Espacio muestral (E)

Es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento.

Ejemplo:

Al lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ejemplo:

¿Cuántos elementos tiene el Espacio Muestral si se lanza una moneda y un dado de seis caras?

Usamos el principio multiplicativo:

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ elementos}$$

En el lanzamiento de monedas, la cantidad de resultados posibles también se determina por el principio multiplicativo:

1 moneda 2 posibilidades

$E = \{c, s\}$

2 monedas $2 \cdot 2 = 4$ posibilidades

$E = \{(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)\}$.

3 monedas $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ posibilidades

$E = \{(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (c,s,s), (s,c,c), (s,c,s), (s,s,c), (s,s,s)\}$

n monedas $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ posibilidades

Cuando un objeto puede caer de ***a*** maneras y se lanzan ***n*** de esos objetos, el Espacio Muestral tiene a^n elementos.

Ejemplo:

Al lanzar tres dados de seis caras, el Espacio Muestral tiene $6^3 = 216$ elementos

1.3 Evento o Suceso

Corresponde a un subconjunto de un Espacio Muestral, asociado a un experimento aleatorio.

Ejemplo:

En el lanzamiento de 2 monedas, el Espacio Muestral es
E = {(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)} y tiene 4 elementos.
Un **suceso** es que salgan dos caras, es decir {(c,c)}, que tiene 1 elemento.

Ejemplo:

En el lanzamiento de un dado ¿cuántos elementos tiene el Espacio Muestral y cuántos el suceso "que salga un número par"?

Espacio Muestral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 6 elementos.

Suceso = {2, 4, 6}, 3 elementos

2. Probabilidad clásica

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

Ejemplo1:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado común salga un número primo?

Solución:

El Espacio Muestral E, está dado por:

E={1, 2, 3, 4, 5, 6}, por lo tanto posee 6 elementos, es decir, 6 casos posibles.

Sea A, el evento o suceso:
A: que salga un número primo, entonces se tiene que:

A={2, 3, 5}, por lo tanto posee 3 elementos, es decir, 3 casos favorables.

Por lo tanto:

Casos posibles: 6 (1, 2, 3, 4, 5 y 6)

Casos favorables (números primos): 3 (2, 3, y 5)

Entonces:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo2:

Al lanzar 2 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean caras?

Casos posibles: 4

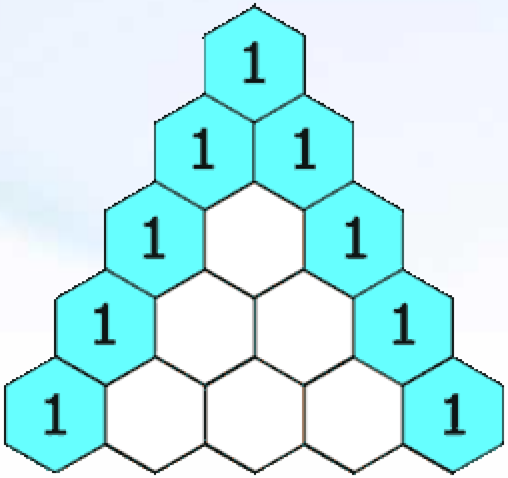
Casos favorables (2 caras): 1

Entonces:

$$P(2\ \text{caras}) = \frac{1}{4}$$

TRIÁNGULO DE PASCAL

El **triángulo de Pascal** en matemática es un conjunto infinito de números enteros ordenados en forma de **triángulo** que expresan coeficientes binomiales. El interés del Triángulo de Pascal radica en su **aplicación** en **álgebra** y permite calcular de forma sencilla **números combinatorios** lo que sirve para aplicar el **binomio de Newton**.



Cada número es la suma de los dos números que están sobre él.

En probabilidades el **Triángulo de Pascal** se utiliza como una técnica de conteo en la resolución de problemas de iteración de experimentos sencillos, cuando el objeto considerado tiene dos posibilidades, por ejemplo una moneda, sexo de un hijo por nacer, etc.

Ejemplo:

Si se lanza una moneda una vez, los casos posibles son:
1 cara (c) ó 1 sello (s), que está representado en la primera fila del Triángulo de Pascal:

1 1

El total de casos posibles es 2.

Si se lanza una moneda dos veces, los casos posibles son:
CC, CS, SC, SS, lo que implica que se tiene 1 caso en que aparecen dos caras, 2 casos distintos en que se obtiene una cara y un sello, y 1 caso en que se obtienen dos sellos, que está representado en la segunda fila del Triángulo de Pascal:

1 2 1

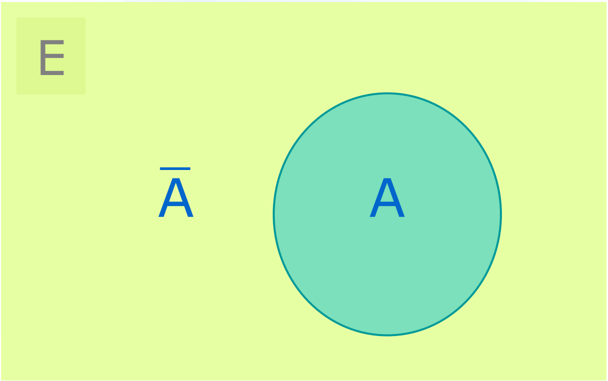
El total de casos posibles es 4.

3. Tipos de sucesos

3.1 Probabilidad de un suceso contrario:

La probabilidad de que un suceso **NO** ocurra, o "probabilidad de un suceso contrario", se obtiene a través de:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



Ejemplo:

Si La probabilidad de que llueva es $\frac{2}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de que **NO** llueva?

Solución:

$$P(\text{no llueva}) = 1 - P(\text{llueva})$$

$$P(\text{no llueva}) = 1 - \frac{2}{5}$$

$$P(\text{no llueva}) = \frac{3}{5}$$

3.2 Probabilidad de un suceso seguro:

Si se tiene certeza absoluta de que un evento **A** ocurrirá:

$$P(A) = 1$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número natural al lanzar un dado común es 1 (6 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6)

Casos favorables: 6 (1,2,3,4,5,6)

$$P(\text{natural}) = \frac{6}{6} = 1$$

3.3 Probabilidad de un suceso imposible:

Si se tiene certeza absoluta de que un evento **A NO** ocurrirá:

$$P(A) = 0$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común es 0 (0 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6)

Casos favorables: 0

$$P(\text{mayor que } 6) = \frac{0}{6} = 0$$

4. PROPIEDADES BÁSICAS DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

4.1 La probabilidad de que ocurra el suceso A ó el suceso B.

Caso 1: Cuando **A** y **B** son eventos **mutuamente excluyentes** está dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo:

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 2 ó mayor que 5?

Solución: $P(<2) = \frac{1}{6}$ y $P(>5) = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} P(<2) \text{ ó } P(>5) &= P(<2) \cup P(>5) \\ &= P(<2) + P(>5) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Caso 2: De no ser **mutuamente excluyentes**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo:

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par?

Solución:

Casos posibles 6 {1,2,3,4,5,6}

Casos favorables (menor que 5): 4 {1,2,3,4}

$$\Rightarrow \quad P\,(\text{menor que } 5) = \frac{4}{6}$$

Casos favorables (número par): 3 {2,4,6}

$$\Rightarrow \quad P\,(\text{número par}) = \frac{3}{6}$$

Como **2** y **4** son menores que 5, y al mismo tiempo son pares, se estarían considerando como casos favorables dos veces.

Por lo tanto:

La probabilidad de que salga un número menor que 5 ó un número par, al lanzar un dado se expresa como:

$$P(<5) \text{ ó } P(\text{par}) = P(<5) \cup P(\text{par}) - P(<5 \cap \text{par})$$

$$= P(<5) + P(\text{par}) - P(<5 \text{ y par})$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

4.2 La probabilidad de que ocurra el suceso **A** y el suceso **B**, siendo éstos independientes.

En este caso, ambos sucesos ocurren simultáneamente, **A** y **B**.

Caso 1: Cuando **A** y **B** son eventos independientes, se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado se obtengan dos números pares?

Solución:

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6)   Casos favorables: 3 (2,4,6)

Entonces:

$$P(\text{dos pares}) = P(\text{par}) \text{ y } P(\text{par}) = P(\text{par}) \cdot P(\text{par})$$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

Caso 2: Cuando **A** y **B** son eventos dependientes corresponde a la Probabilidad Condicionada.

Corresponde a la probabilidad de B tomando como espacio muestral a A, es decir, la probabilidad de que ocurra B dado que ha sucedido A.

$$P\ (B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo:

Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 4 sabiendo que ha salido par?

Solución:

B: Sacar 4

A: Número par = { 2,4,6 }

$$\boxed{P\ (B/A) = \frac{1}{3}}$$

4.3 Probabilidad **con** reposición.

Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución:

Primera extracción	Segunda extracción (Con reposición)
Casos posibles: 30	Casos posibles: 30
Casos favorables: 12	Casos favorables: 12

Entonces:

$$
\begin{aligned}
P(\text{dos blancas}) &= P(\text{blanca}) \text{ y } P(\text{blanca}) \\
&= P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) \\
&= \frac{12}{30} \cdot \frac{12}{30} = \frac{144}{900} = \frac{4}{25}
\end{aligned}
$$

4.4 Probabilidad **sin** reposición.

Ejemplo:

Se tiene una bolsa con 30 pelotitas entre blancas y rojas, de las cuales 12 son blancas, todas de igual peso y tamaño. Si se extraen 2 pelotitas al azar, sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?

Solución:

Primera extracción	Segunda extracción (Sin reposición)
Casos posibles: 30	Casos posibles: 29
Casos favorables: 12	Casos favorables: 11

Entonces:

$$\begin{aligned} P(\text{dos blancas}) &= P(\text{blanca}) \text{ y } P(\text{blanca}) \\ &= P(\text{blanca}) \cdot P(\text{blanca}) \\ &= \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{132}{870} = \frac{22}{145} \end{aligned}$$