Generalidades y ángulos en la circunferencia

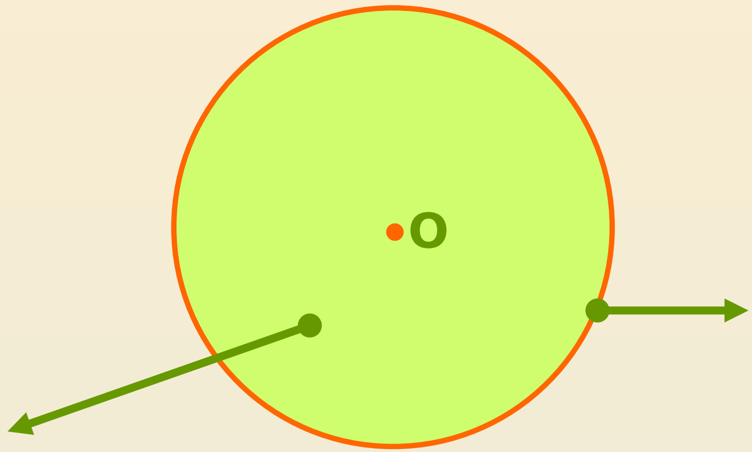
Matemática I

III° Medio 2018

1. Elementos de la circunferencia y del círculo
2. Área y perímetro
3. Propiedades de ángulos

1. Elementos de la circunferencia y del círculo

1.1 Definición



Circunferencia

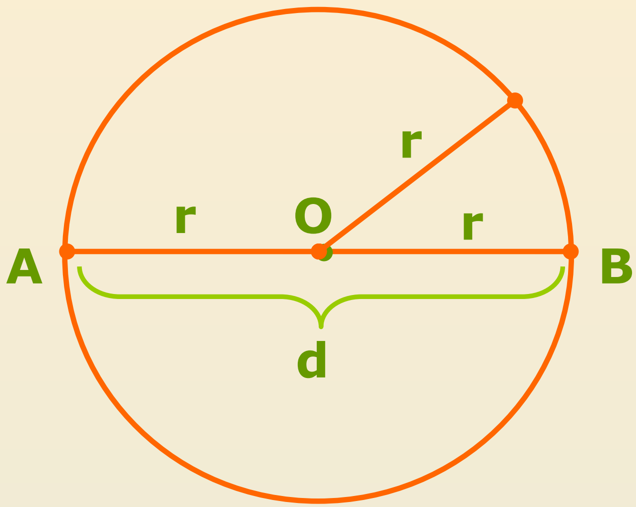
Línea curva, cerrada y plana, cuyos puntos equidistan (igual distancia) de un punto fijo llamado **centro**.

Círculo

Región del plano limitada por una circunferencia

1. Elementos de la circunferencia y del círculo

1.2 Radio (r) y diámetro (d)



O: centro de la circunferencia

$\overline{OB}$: radio = **r**

Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella.

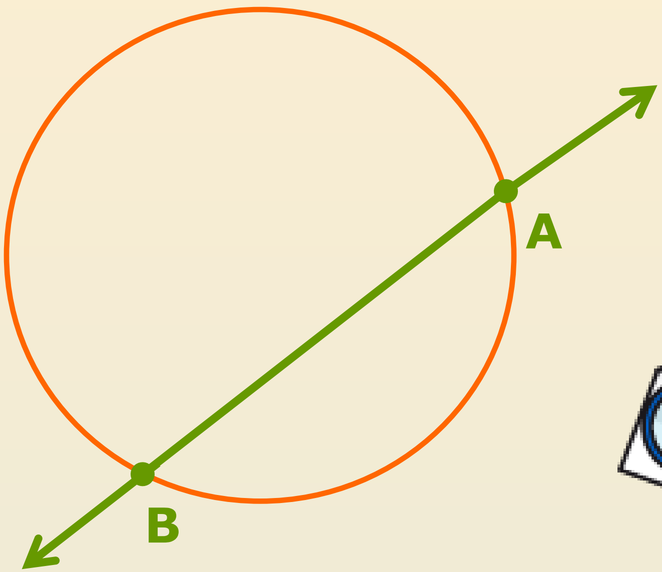
$\overline{AB}$: diámetro = **d** = **2r**

Es la línea recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de la circunferencia.

El diámetro divide a la circunferencia en 2 semicircunferencias, es decir,
Arco AB = Arco BA

1. Elementos de la circunferencia y del círculo

1.3 Cuerda y secante



$\overline{AB}$: Cuerda

Segmento que une dos puntos distintos de la circunferencia.

El diámetro es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia y tiene la mayor longitud.

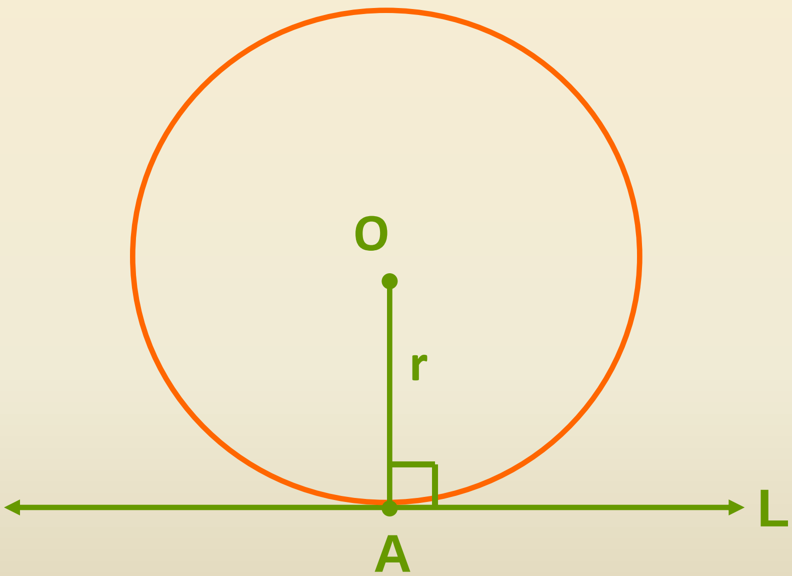
$\overleftrightarrow{AB}$: Secante

Recta que intersecta a la circunferencia en 2 puntos, formando una cuerda.

1. Elementos de la circunferencia y del círculo

1.4 Tangente

Recta que intersecta en un solo punto a la circunferencia. Este punto es llamado "**punto de tangencia**" o "**punto tangencial**".



O: centro de la circunferencia

$\overline{OA}$: radio

A: Punto de tangencia

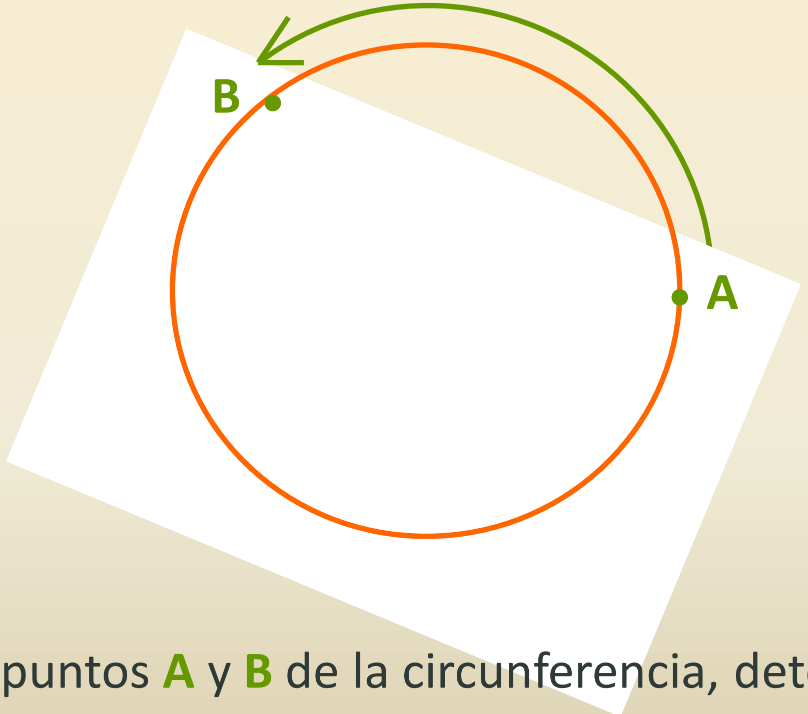
L: Tangente

$\overline{OA} \perp L$

1. Elementos de la circunferencia y del círculo

1.5 Arco de circunferencia

Corresponde a una parte de la circunferencia. Su lectura es en sentido anti-horario (contrario a los punteros del reloj).

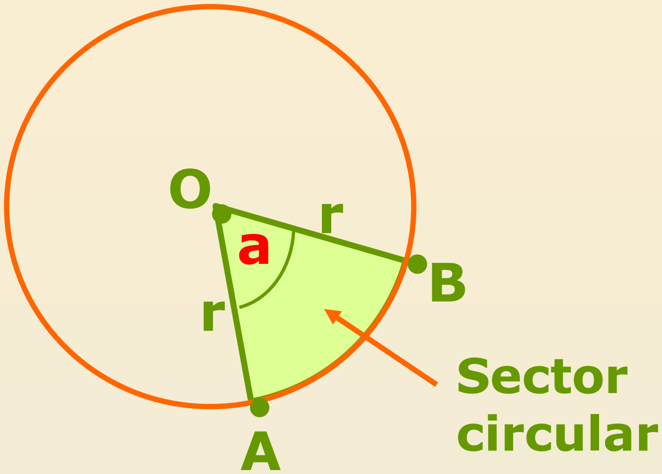


$\overset{\frown}{AB}$ **:** arco de circunferencia

Los puntos **A** y **B** de la circunferencia, determinan el arco **AB**.

1. Elementos de la circunferencia y del círculo

1.6 Sector y segmento circular

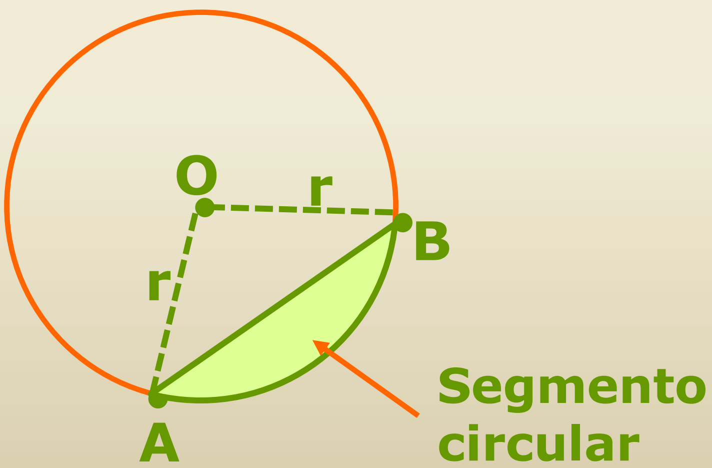


O: centro de la circunferencia

r : radio

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia

Es una fracción del área del círculo determinada por dos radios y un arco.



O : centro de la circunferencia

$\overline{AB}$: cuerda

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferencia

Es una fracción del área del círculo, determinada por una cuerda y un arco.

2. Área y perímetro

2.1 Área del círculo

Si **r** es el radio, entonces:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

Ejemplo: Determinar el área del círculo cuyo diámetro mide 20 cm.

Si el diámetro mide 20 cm, entonces el radio mide 10 cm.
Luego, el área del círculo es:

$$A = \pi \cdot 10^2 \quad \Rightarrow \quad A = 100\pi \text{ cm}^2$$

2. Áreas y perímetros

2.2 Perímetro de la circunferencia

Si **r** es el radio y **d** el diámetro, entonces:

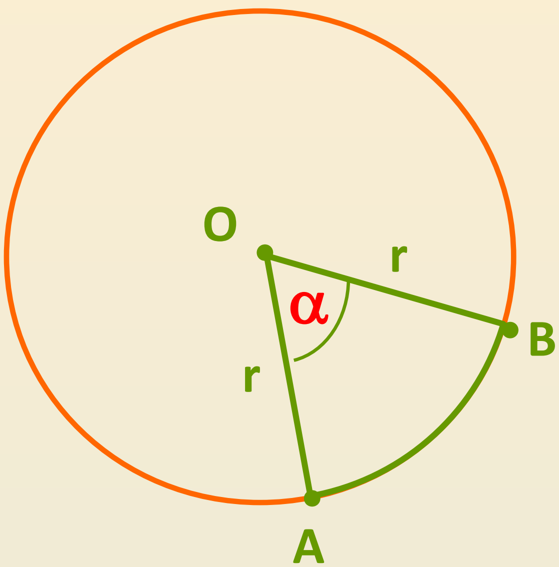
$\boxed{\text{Perímetro} = 2\,\pi \cdot r}$ ó $\boxed{\text{Perímetro} = \pi \cdot d}$

Ejemplo: Determinar el perímetro de una circunferencia cuyo radio mide 15 cm.

$$P = 2\,\pi \cdot 15 \quad \Rightarrow \quad P = 30\,\pi \text{ cm.}$$

2. Áreas y perímetros

2.3 Longitud de un arco de circunferencia



O: centro de la circunferencia

r : radio

$\overset{\frown}{AB}$ **:** arco de circunferencia

α **:** ángulo del centro

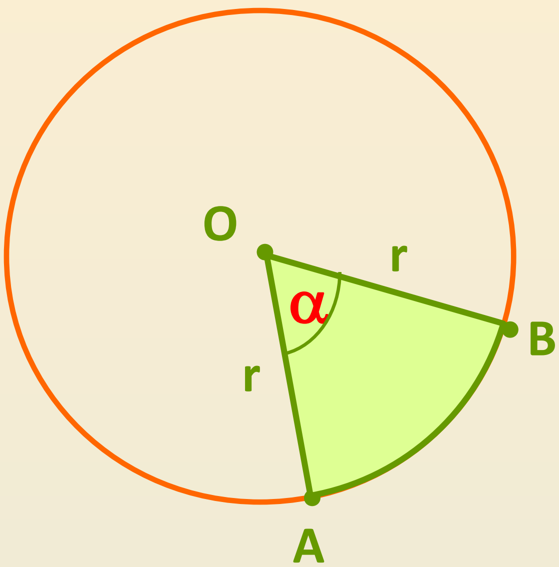
$$\text{Longitud de arco} = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360°}$$

$$\overset{\frown}{AB} = \alpha$$

Un arco corresponde a una parte de la circunferencia. Luego, es una fracción del perímetro (**2·π·r**) o del arco completo (**360°**). En ambos casos, su medida depende del ángulo del centro que lo determina (α).

2. Áreas y perímetros

2.4 Área y perímetro de un sector circular



$$A_{sector} = \frac{\alpha \cdot \pi r^2}{360^\circ}$$

$$P_{sector} = \overset{\frown}{AB} + 2r$$

$$P_{sector} = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360^\circ} + 2r$$

O: centro de la circunferencia

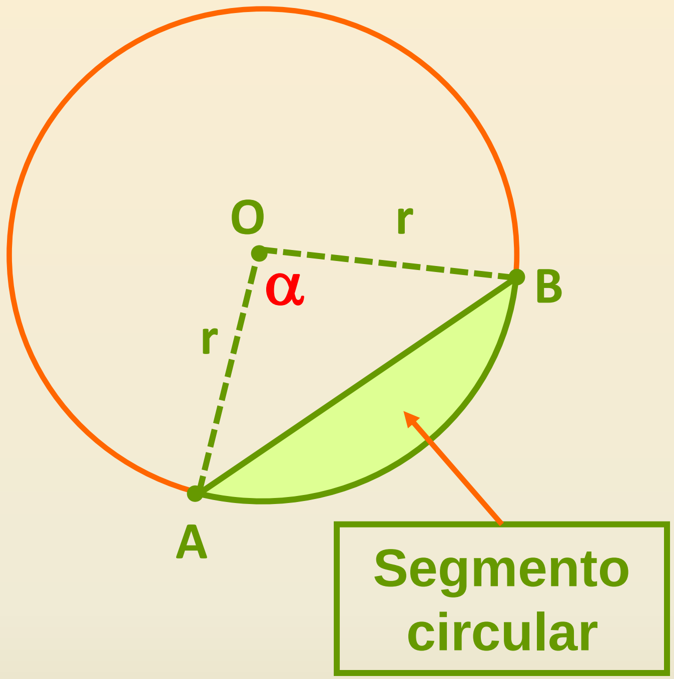
r : radio

$\overset{\frown}{AB}$ **:** arco de circunferencia

α **:** ángulo del centro

2. Áreas y perímetros

2.5 Perímetro de un segmento circular



$$P_{segmento} = \overset{\frown}{AB} + \overline{AB}$$

$$P_{segmento} = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360°} + \overline{AB}$$

O: centro de la circunferencia

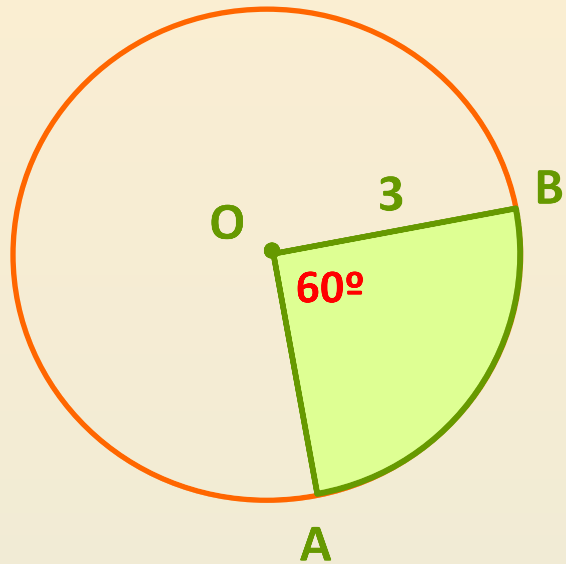
$\overline{AB}$ **:** cuerda

$\overset{\frown}{AB}$ **:** arco de circunferencia

Ejemplo

Determinar el área y perímetro de la zona achurada de la figura.

O: centro de la circunferencia.



$$A_{sector} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 3^2}{360}$$

$$A_{sector} = \frac{1 \cdot \pi \cdot 9}{6}$$

$$\boxed{A_{sector} = \frac{3\,\pi}{2}}$$

$$P_{sector} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 60}{360} + 2 \cdot 3$$

$$\boxed{P_{sector} = \pi + 6}$$

3. Ángulos en la circunferencia

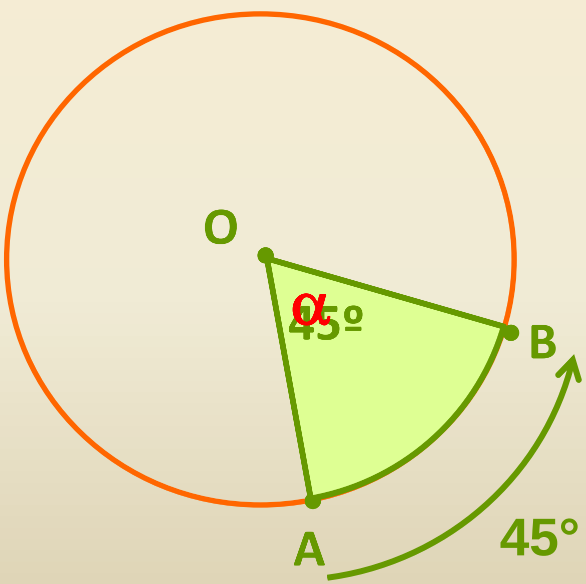
3.1 Ángulo del centro y ángulo inscrito

A. Ángulo del centro:

Tiene el vértice en el centro de la circunferencia y mide lo mismo que el arco que subtiende.

Ejemplo:

Si el arco AB = 45º, entonces α = 45º



O: centro de la circunferencia

3. Ángulos en la circunferencia

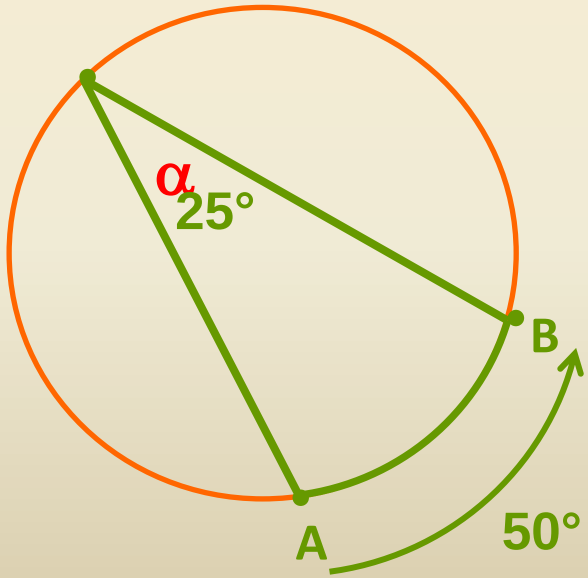
3.1 Ángulo del centro y ángulo inscrito

B. Ángulo inscrito:

Tiene el vértice en la circunferencia y mide la mitad del arco que subtiende.

Ejemplo:

Si el arco AB = 50º, entonces α = 25º

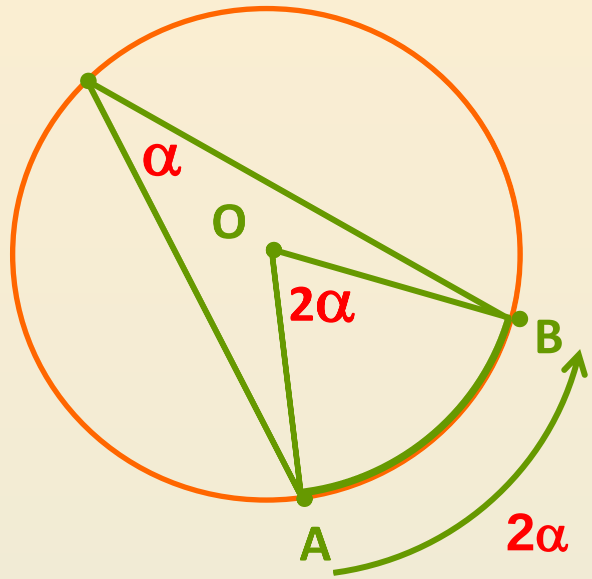


3. Ángulos en la circunferencia

3.1 Ángulo del centro y ángulo inscrito

Corolario:

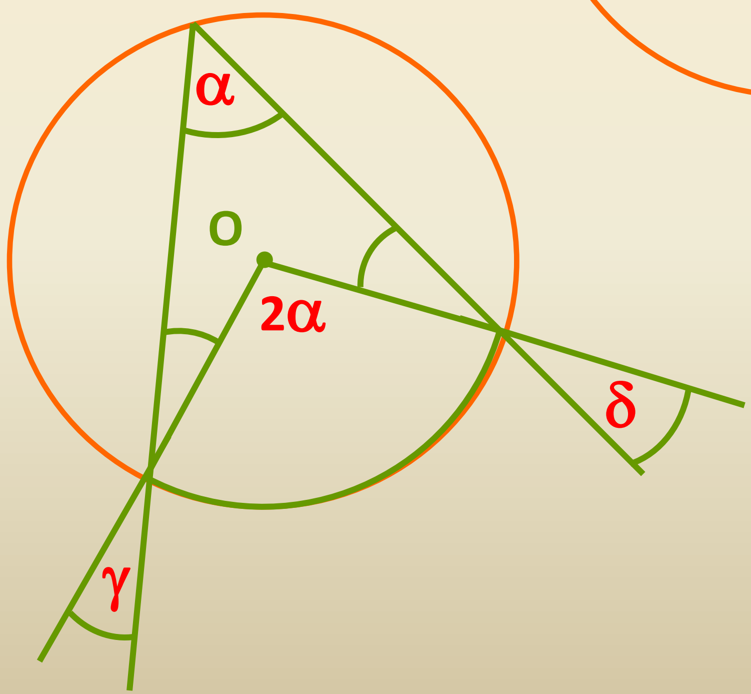
"Si un ángulo inscrito y un ángulo del centro subtienden el mismo arco, entonces el ángulo del centro es el doble del ángulo inscrito".



O: centro de la circunferencia

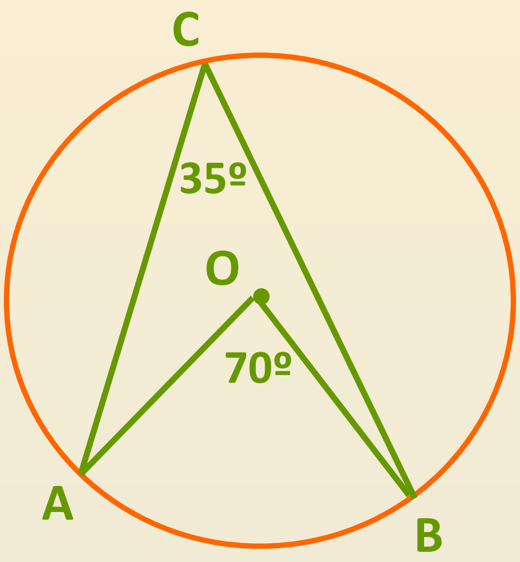
Además, se cumple que:

$$\alpha = \gamma + \delta$$



Ejemplo

En la figura, si el ángulo del centro AOB mide 70°, entonces el ángulo inscrito ACB mide 35°.

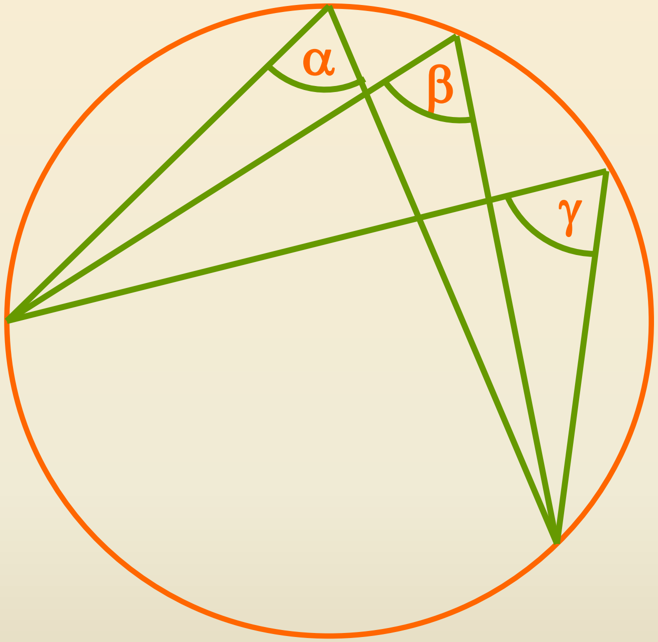


O: centro de la circunferencia

3. Ángulos en la circunferencia

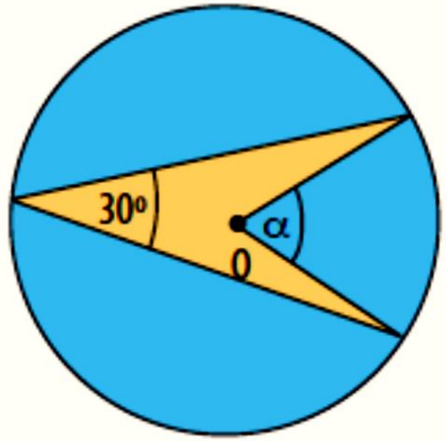
3.2 Igualdad de ángulos inscritos

Si dos o más ángulos inscritos subtienden el mismo arco, entonces miden lo mismo.

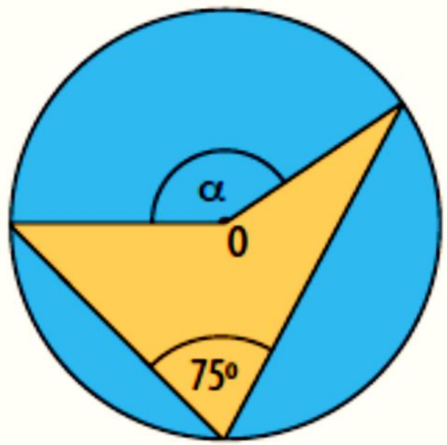


$\alpha = \beta = \gamma$

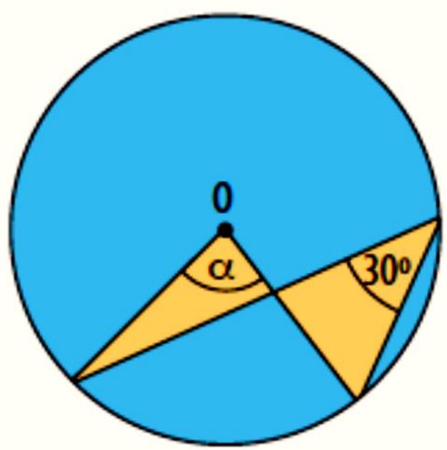
a)



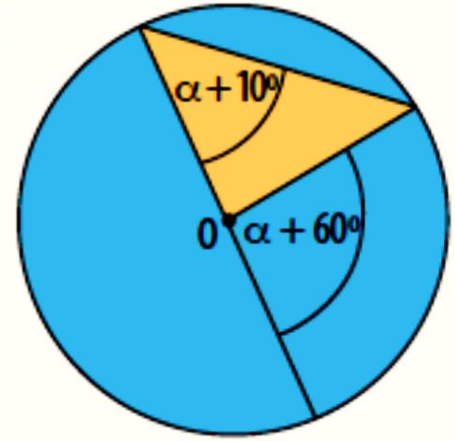
b)



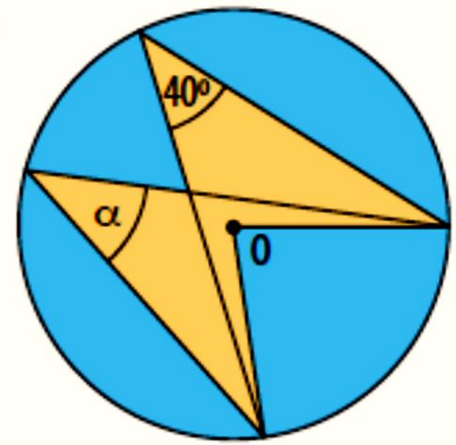
c)



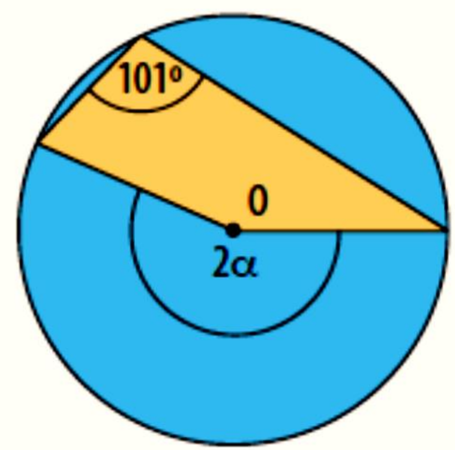
d)



e)



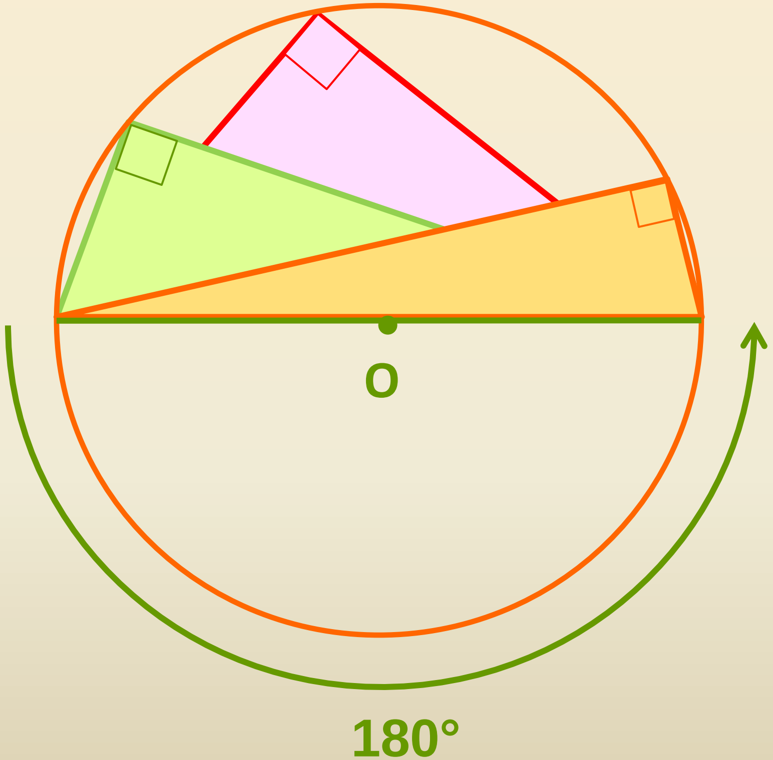
f)



3. Ángulos en la circunferencia

3.3 Triángulo inscrito en una semicircunferencia

Todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo con hipotenusa igual al diámetro.



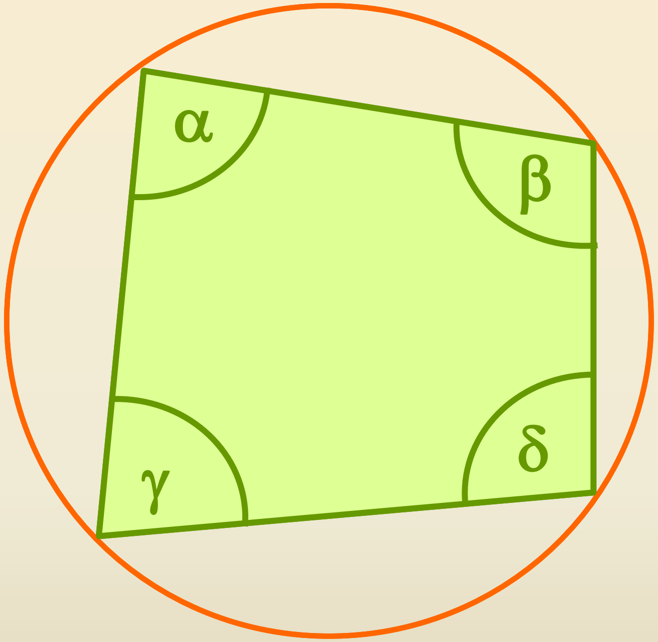
O: centro de la circunferencia

3. Ángulos en la circunferencia

3.4 Cuadrilátero inscrito en una circunferencia

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.

Ejemplo:



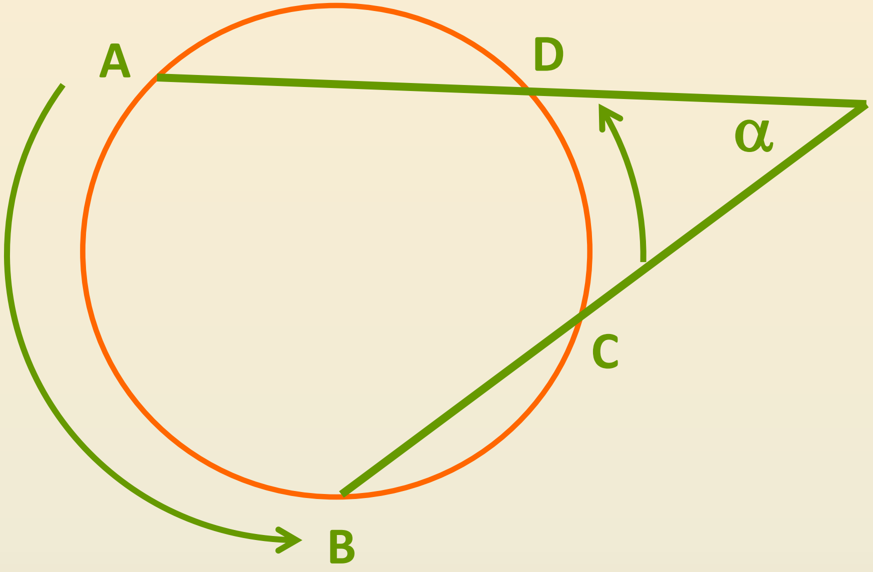
$$\alpha + \delta = 180°$$

$$\gamma + \beta = 180°$$

3. Ángulos en la circunferencia

3.5 Teorema del ángulo exterior

Si α es ángulo exterior de la circunferencia, entonces:

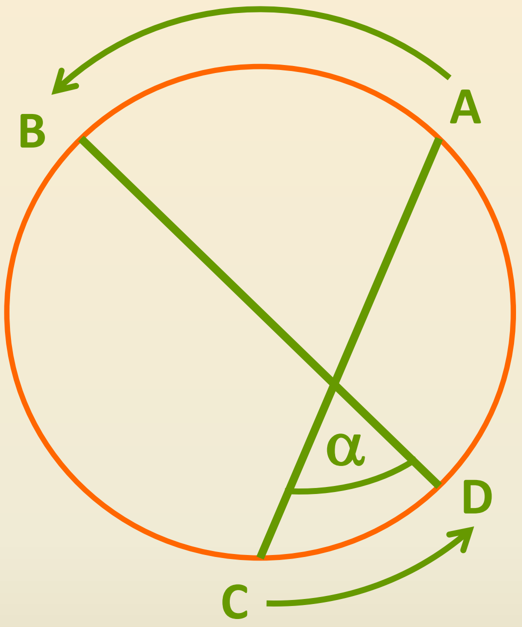


$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

3. Ángulos en la circunferencia

3.6 Teorema del ángulo interior

Si α es ángulo interior de la circunferencia, entonces:

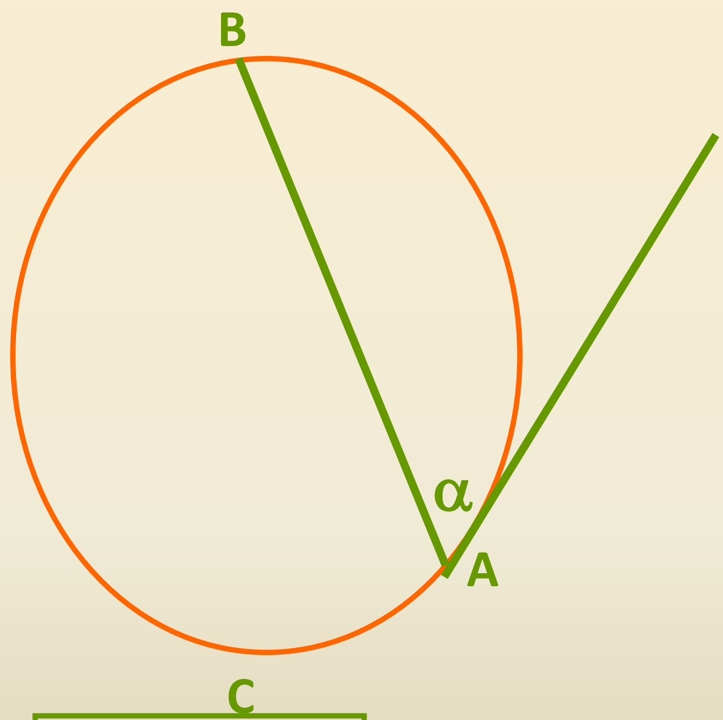


$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

3. Ángulos en la circunferencia

3.7 Teorema del ángulo semi-inscrito

Si α es ángulo semi-inscrito a la circunferencia, entonces:



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$