



2º Medio A 2018

TEMA:
Trigonometría



APRENDIZAJES ESPERADOS

- Reconocer las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.
- Calcular valores de las funciones trigonométricas.
- Aplicar las funciones trigonométricas en la resolución de problemas relativos a cálculos de alturas y distancias, ángulos de elevación y de depresión.

Contenidos

Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

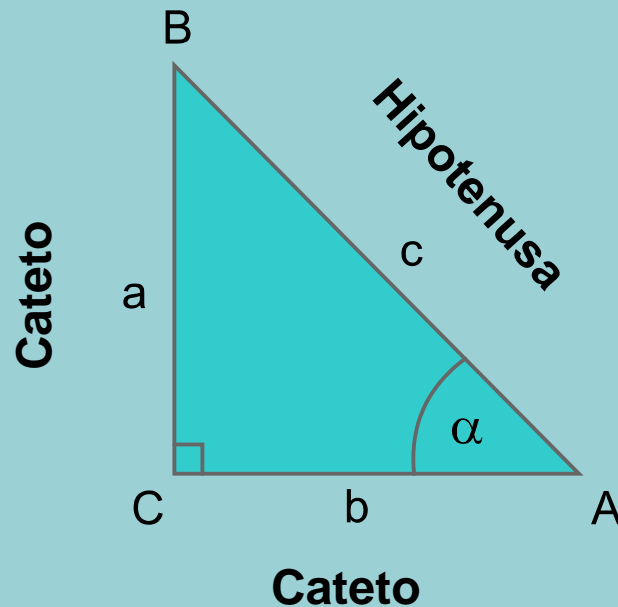
1. Definición
 - Funciones trigonométricas
 - Funciones trigonométricas inversas
2. Identidades trigonométricas
3. Funciones trigonométricas para ángulos comunes
4. Definición
 - Ángulo de elevación
 - Ángulo de depresión

Funciones Trigonométricas

1. Definición

En un triángulo rectángulo, con un ángulo interior agudo, se puede establecer 6 razones entre las medidas de sus lados.

Según el dibujo, c : hipotenusa, a y b : catetos.



- **Funciones Trigonométricas**

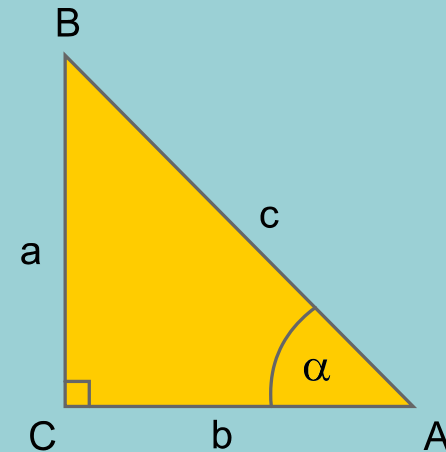
Seno (sen):

Corresponde a la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Según el dibujo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$$



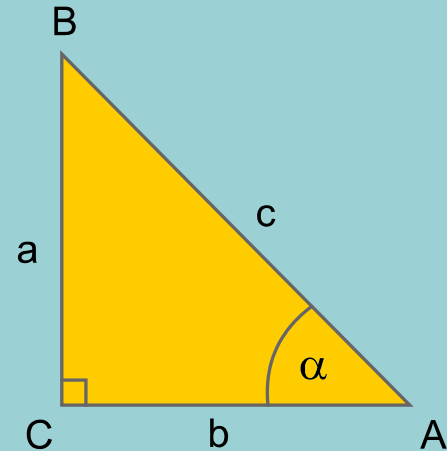
Coseno (cos):

Corresponde a la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Según el dibujo:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$



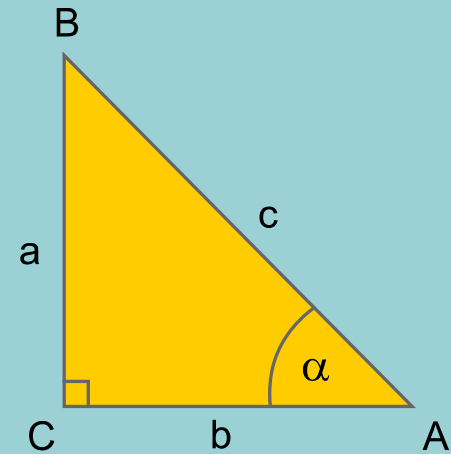
Tangente (tg):

Corresponde a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\mathbf{tg \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}}$$

Según el dibujo:

$$\mathbf{tg \alpha = \frac{a}{b}}$$



- **Funciones Trigonométricas Inversas**

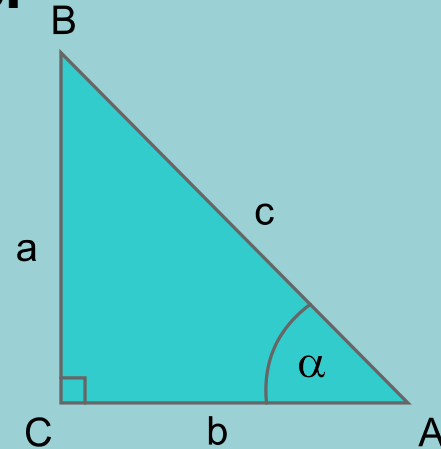
Cotangente (ctg):

Corresponde a la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.

$$\text{ctg } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Según el dibujo:

$$\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a}$$



La cotangente corresponde al inverso multiplicativo de la tangente.

$$\text{ctg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

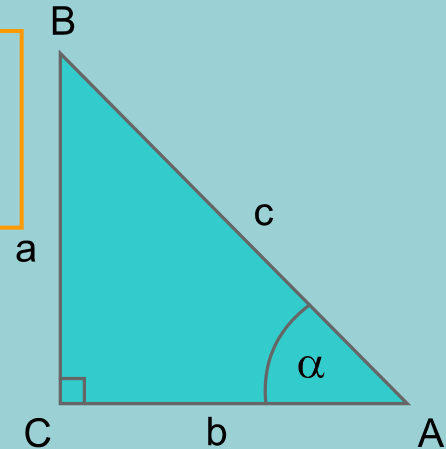
Secante (sec):

Corresponde a la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.

$$\sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

Según el dibujo:

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}$$



La secante corresponde al inverso multiplicativo del coseno.

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

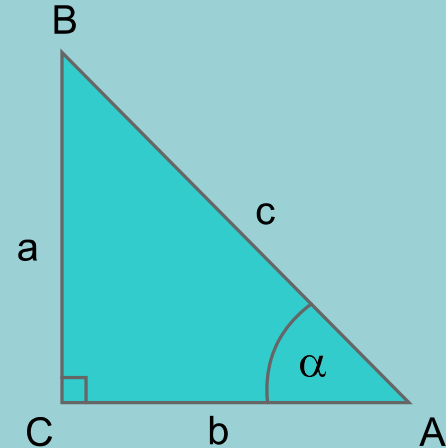
Cosecante (cosec):

Corresponde a la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

$$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Según el dibujo:

$$\text{cosec } \alpha = \frac{c}{a}$$



La cosecante corresponde al inverso multiplicativo del seno.

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

Ejemplo:

$$\text{sen } \alpha = \frac{12}{15}$$

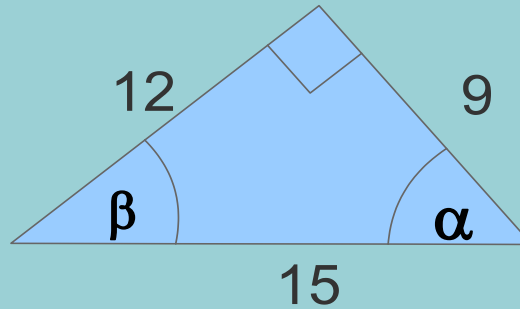
$$\text{cos } \alpha = \frac{9}{15}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{12}{9}$$

$$\text{cosec } \alpha = \frac{15}{12}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{15}{9}$$

$$\text{ctg } \alpha = \frac{9}{12}$$



$$\text{sen } \beta = \frac{9}{15}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{12}{15}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{9}{12}$$

$$\text{cosec } \beta = \frac{15}{9}$$

$$\text{sec } \beta = \frac{15}{12}$$

$$\text{ctg } \beta = \frac{12}{9}$$

Observación:

En el ejemplo anterior, α y β son los ángulos agudos del triángulo rectángulo, y por lo tanto, son complementarios ($\alpha + \beta = 90^\circ$).

Además, se puede concluir que: $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{cos}\beta$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{cos}(90^\circ - \alpha)$$

¿Qué más podríamos concluir?

Aplicación:

Si $\operatorname{cos} 20^\circ = m$, entonces:

$$\operatorname{sen} 70^\circ + 2\operatorname{cos} 20^\circ = m + 2m = 3m$$

2. Identidades trigonométricas

Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene razones trigonométricas y que es verdadera, cualesquiera sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas.

Para demostrar identidades trigonométricas se necesita conocer algunas relaciones trigonométricas fundamentales:

Ejemplos:

$$1. \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$2. \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$3. \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$4. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$5. \quad \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$6. \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

3. Valores de las funciones trigonométricas de ángulos comunes (30°, 60° y 45°)

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Observa que: $\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ$

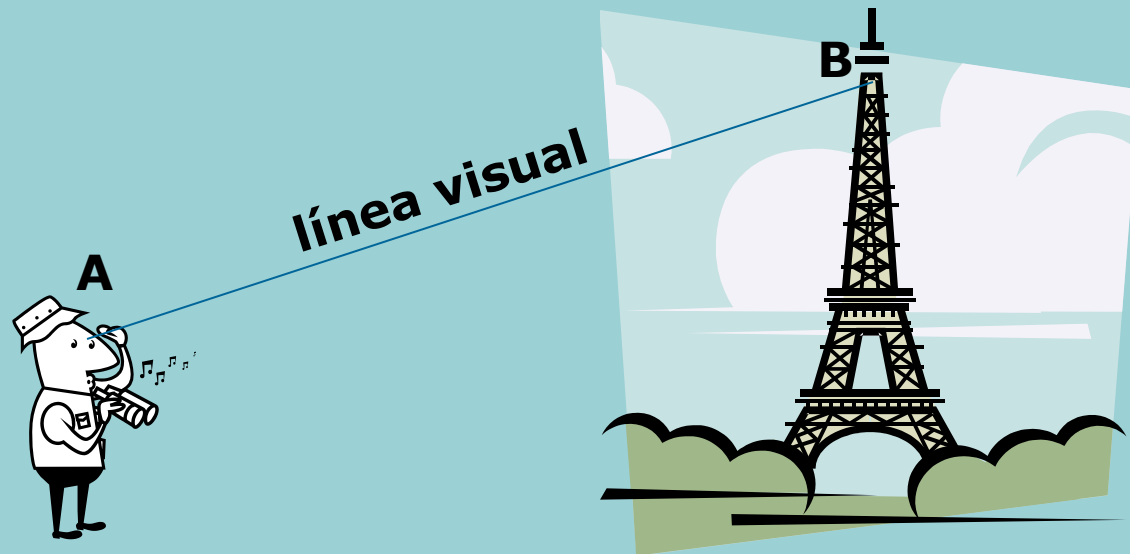
$\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ$

$\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ$

4. Ángulos de elevación y de depresión

Los ángulos de elevación y de depresión, son los que se forman por la línea visual y la línea horizontal.

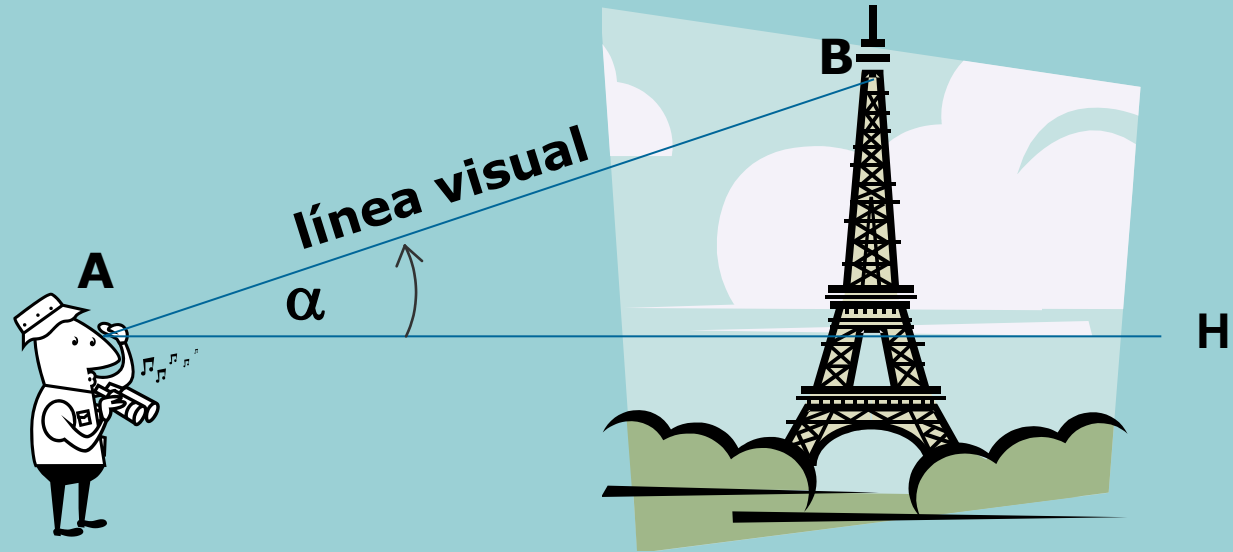
Se llama línea visual (o de visión) a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado.



En la imagen, A observa a B

- **Ángulo de elevación**

Llamamos ángulo de elevación al que forman la horizontal del observador y el lugar observado, cuando éste está situado arriba del observador.



α : ángulo de elevación

H : horizontal del observador

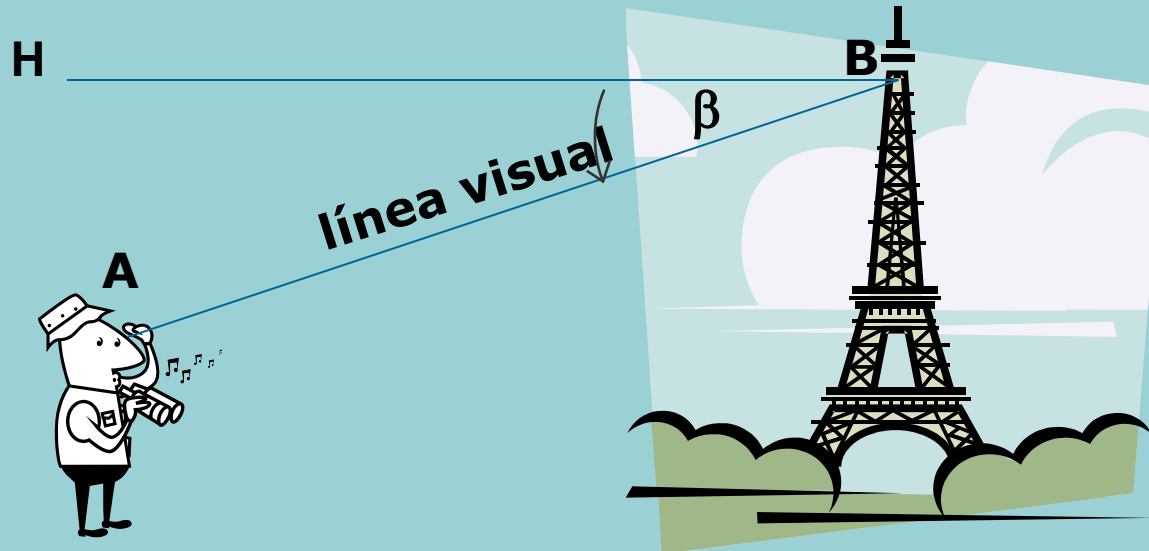
En la imagen, A observa a B.

- **Ángulo de depresión**

Cuando el observador está más alto lo llamaremos ángulo de depresión.

En la imagen, el observador ahora está en la torre, hablaremos entonces de un ángulo de depresión.

En la imagen B observa a A.



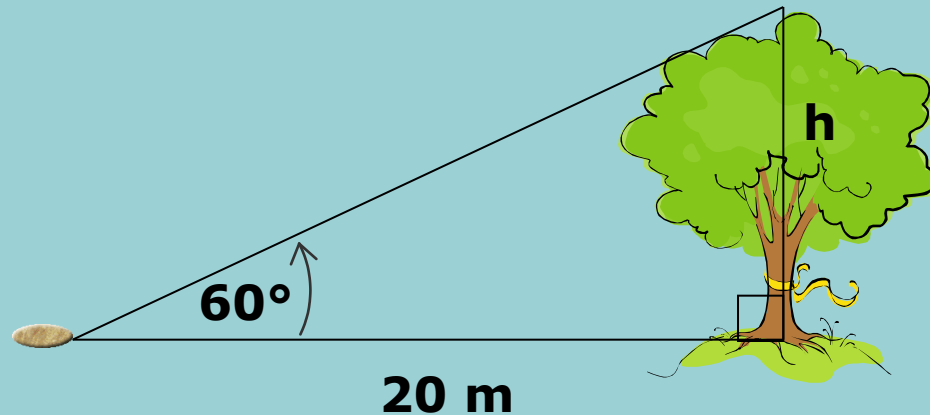
β : ángulo de depresión H: horizontal del observador

Ejemplo:

1. Una piedra que está en el suelo se encuentra a 20 metros de un árbol con un ángulo de elevación de 60° . ¿Cuál es la altura del árbol?

Solución:

El árbol es perpendicular al suelo, entonces su dibujo es:



Los datos corresponden a los catetos del triángulo rectángulo y la función trigonométrica que los relaciona es la tangente, entonces:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

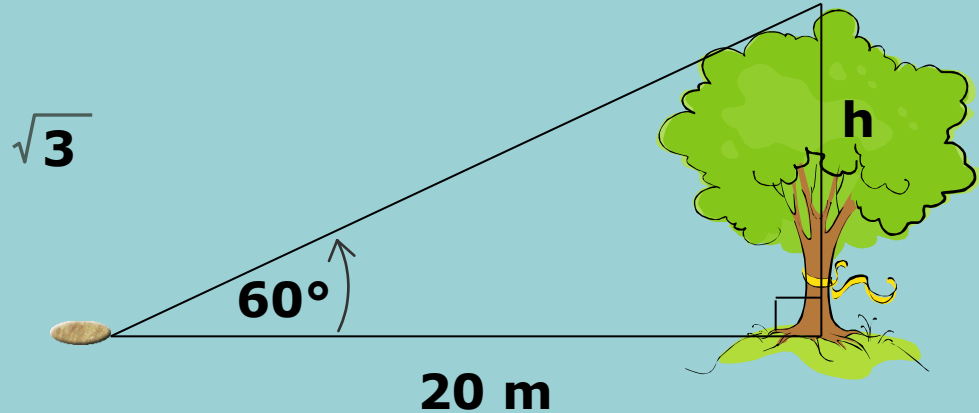
$$\Rightarrow \text{tg } 60^\circ = \frac{h}{20}$$

Pero la tg

$$60^\circ =$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{20}$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3} = h$$



Por lo tanto, la altura del árbol es $20\sqrt{3}$ m

2. Una persona se encuentra en la parte superior de un faro de 30 metros de altura y observa un gato que se encuentra en el techo de una casa de 5 metros de altura, con un ángulo de depresión de 30° . ¿Cuál es la distancia entre el gato y la persona?



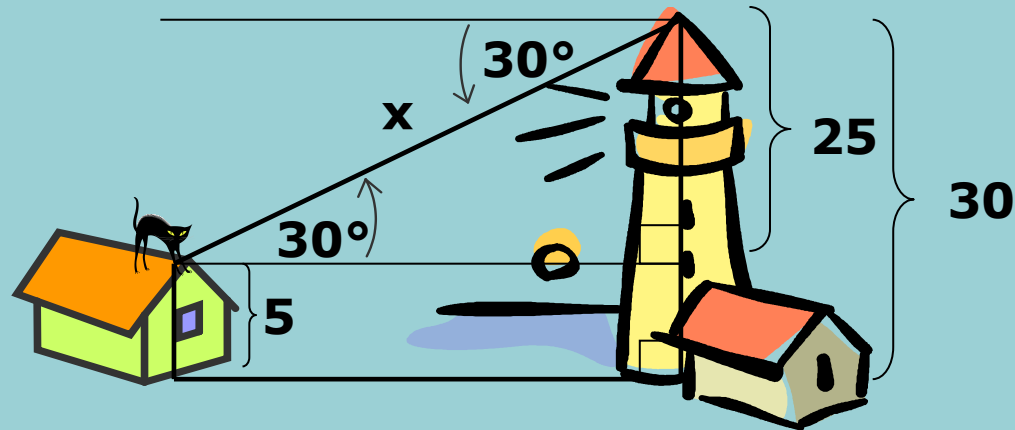
Los datos que se tienen corresponden al cateto opuesto y a la hipotenusa, del triángulo rectángulo formado.

La función trigonométrica que los relaciona es el seno, entonces:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{25}{x}$$

$$\text{Como } \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{25}{x}$$

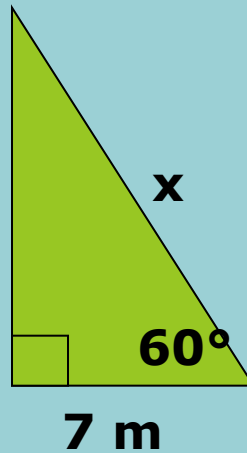
$$\Rightarrow x = 50 \text{ m}$$



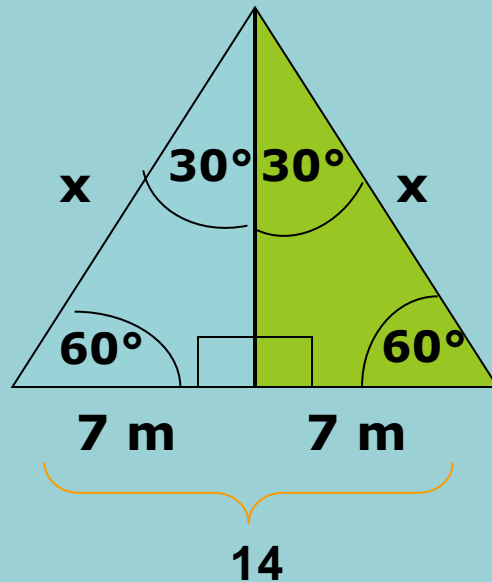
Estrategia para la resolución de ejercicios

Una persona que se encuentra a 7 metros de un árbol observa el alto de éste con un ángulo de elevación de 60° . Determine la distancia entre el observador y la punta del árbol.

El dibujo correspondiente es:



Los datos corresponden al cateto adyacente y a la hipotenusa del triángulo; la función trigonométrica que los relaciona es el coseno, sin embargo, no es necesario utilizarlo, ya que el triángulo corresponde a la mitad de un triángulo equilátero.



Entonces $x = 14$ metros.