
# 2º Medio A
# 2018

## *TEMA:*

### *Trigonometría*

# APRENDIZAJES ESPERADOS

- Reconocer las funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

- Calcular valores de las funciones trigonométricas.

- Aplicar las funciones trigonométricas en la resolución de problemas relativos a cálculos de alturas y distancias, ángulos de elevación y de depresión.

# Contenidos

## Funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

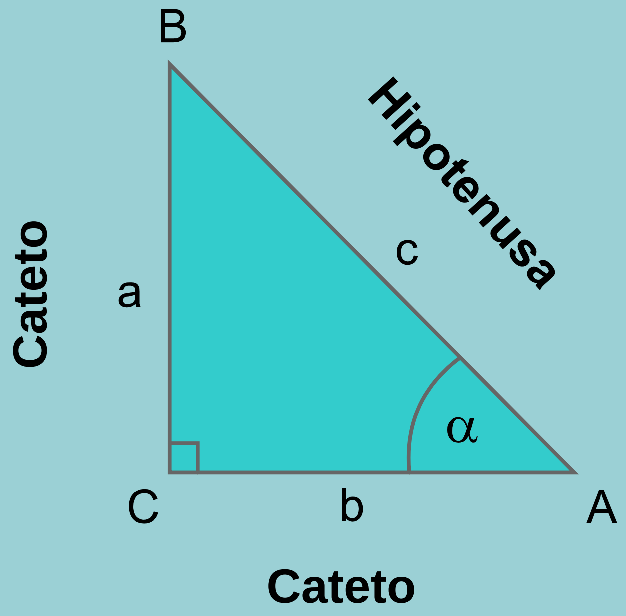
1. Definición
    - Funciones trigonométricas
    - Funciones trigonométricas inversas
2. Identidades trigonométricas
3. Funciones trigonométricas para ángulos comunes
4. Definición
    - Ángulo de elevación
    - Ángulo de depresión

# Funciones Trigonométricas

## 1. Definición

**En un triángulo rectángulo, con un ángulo interior agudo, se puede establecer 6 razones entre las medidas de sus lados.**

**Según el dibujo, c: hipotenusa, a y b: catetos.**

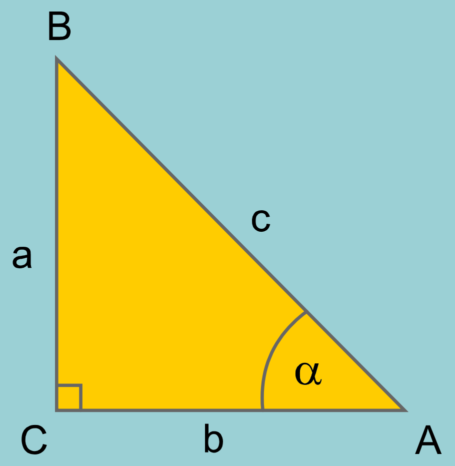


- **Funciones Trigonométricas**

**Seno (sen):**

**Corresponde a la razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.**

$$\textbf{sen}\ \alpha = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}}$$



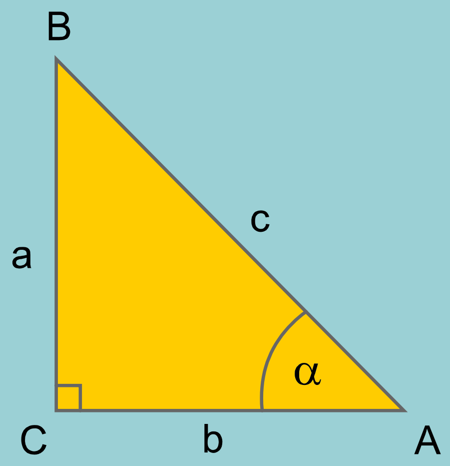

**Según el dibujo:**

$$\textbf{sen}\ \alpha = \frac{a}{c}$$

**Coseno (cos):**

**Corresponde a la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.**

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$



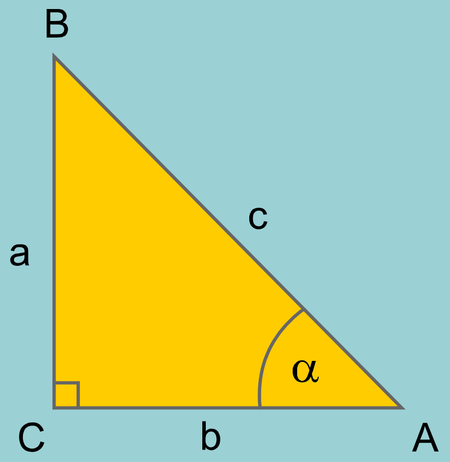

**Según el dibujo:**

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

**Tangente (tg):**

**Corresponde a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.**

$$\textbf{tg}\ \alpha = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto adyacente}}$$




**Según el dibujo:**

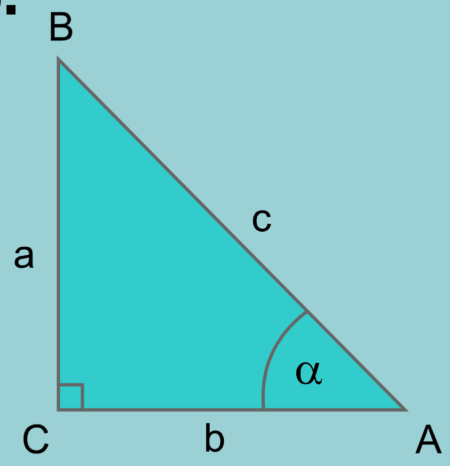
$$\textbf{tg}\ \alpha = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

- **Funciones Trigonométricas Inversas**

**Cotangente (ctg):**

**Corresponde a la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.**

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$




**Según el dibujo:**

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{b}{a}$$

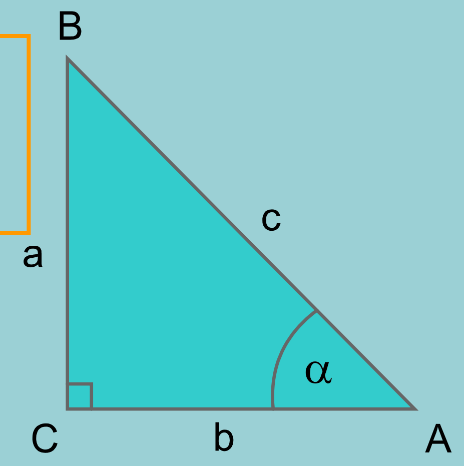
**La cotangente corresponde al inverso multiplicativo de la tangente.**

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$$

**Secante (sec):**

**Corresponde a la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.**

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$




**Según el dibujo:**

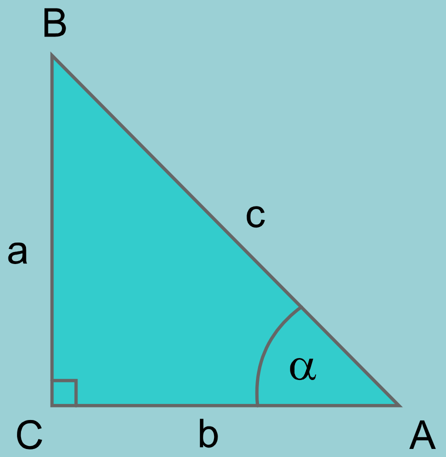
$$\sec\alpha = \frac{c}{b}$$

**La secante corresponde al inverso multiplicativo del coseno.**

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

## Cosecante (cosec):

**Corresponde a la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.**




$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

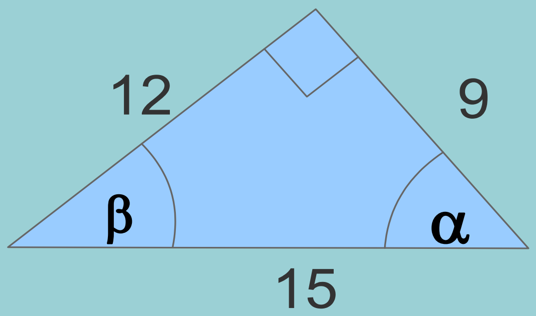
**Según el dibujo:**

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}$$

**La cosecante corresponde al inverso multiplicativo del seno.**

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

**Ejemplo:**




$$\text{sen}\ \alpha = \frac{12}{15}$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{15}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{12}{9}$$

$$\text{cosec}\ \alpha = \frac{15}{12}$$

$$\sec \alpha = \frac{15}{9}$$

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{9}{12}$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{9}{15}$$

$$\cos \beta = \frac{12}{15}$$

$$\text{tg}\ \beta = \frac{9}{12}$$

$$\text{cosec}\ \beta = \frac{15}{9}$$

$$\sec \beta = \frac{15}{12}$$

$$\text{ctg}\ \beta = \frac{12}{9}$$

## Observación:

**En el ejemplo anterior, $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos agudos del triángulo rectángulo, y por lo tanto, son complementarios ($\alpha + \beta = 90°$).**

**Además, se puede concluir que:** $\text{sen}\alpha = \cos\beta$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

**¿Qué más podríamos concluir?**

## Aplicación:

**Si $\cos 20° = m$, entonces:**

$$\text{sen } 70° + 2\cos 20° = \quad m + 2m = 3m$$

## 2. Identidades trigonométricas

**Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene razones trigonométricas y que es verdadera, cualesquiera sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas.**

**Para demostrar identidades trigonométricas se necesita conocer algunas relaciones trigonométricas fundamentales:**

**Ejemplos:**

1. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

2. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

3. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

4. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

5. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

6. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

# 3. Valores de las funciones trigonométricas de ángulos comunes (30°, 60° y 45°)

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sen | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

**Observa que:** sen 30° = cos 60°

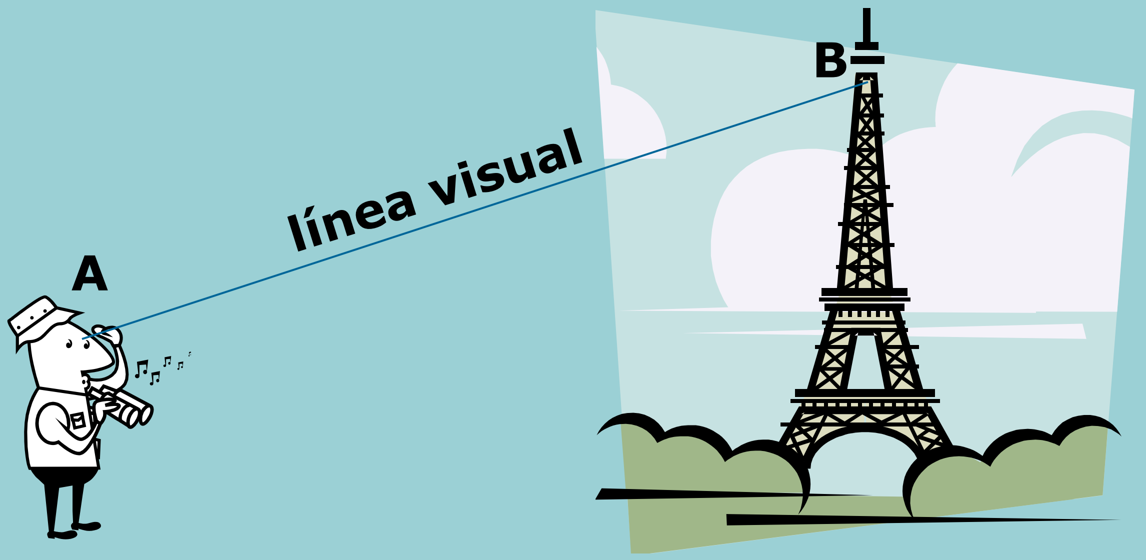
sen 60° = cos 30°

sen 45° = cos 45°

# 4. Ángulos de elevación y de depresión

**Los ángulos de elevación y de depresión, son los que se forman por la línea visual y la línea horizontal.**

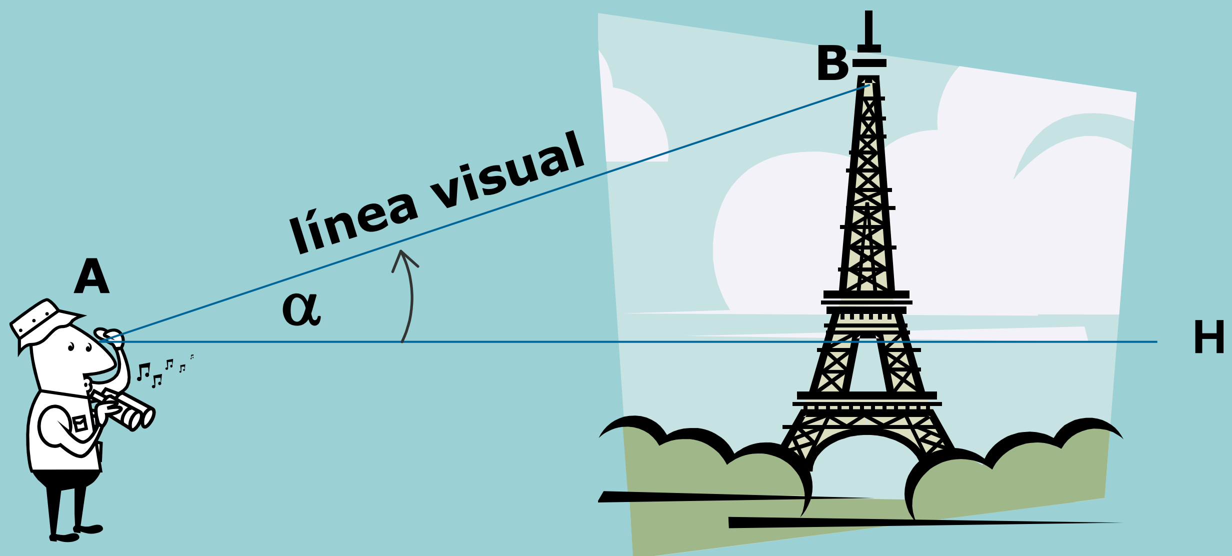
**Se llama línea visual (o de visión) a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado.**




**En la imagen, A observa a B**

- **Ángulo de elevación**

**Llamamos ángulo de elevación al que forman la horizontal del observador y el lugar observado, cuando éste está situado arriba del observador.**




**α: ángulo de elevación**

**H : horizontal del observador**

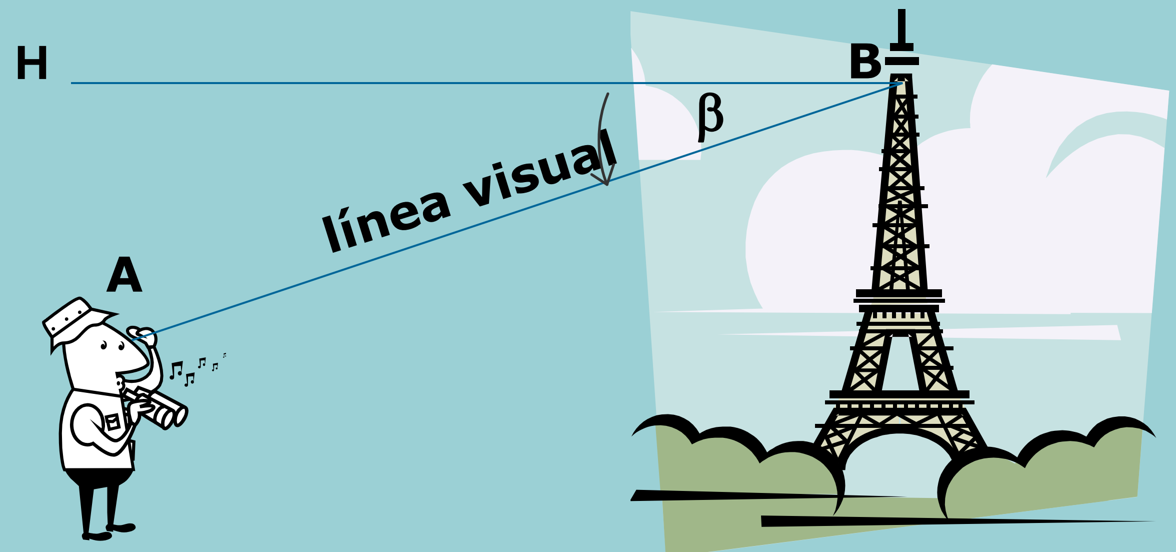
**En la imagen, A observa a B.**

- **Ángulo de depresión**

**Cuando el observador está más alto lo llamaremos ángulo de depresión.**

**En la imagen, el observador ahora está en la torre, hablaremos entonces de un ángulo de depresión.**

**En la imagen B observa a A.**



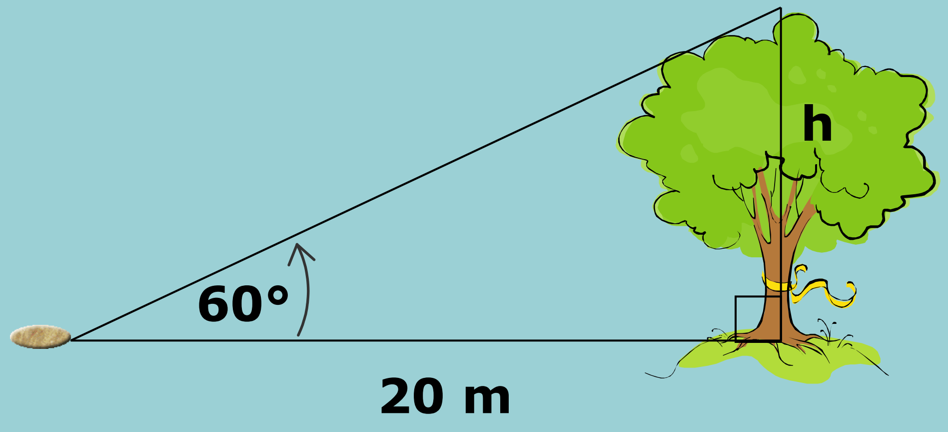

**β: ángulo de depresión** **H : horizontal del observador**

**Ejemplo:**

1. **Una piedra que está en el suelo se encuentra a 20 metros de un árbol con un ángulo de elevación de 60°. ¿Cuál es la altura del árbol?**

**Solución:**

**El árbol es perpendicular al suelo, entonces su dibujo es:**



Los datos corresponden a los catetos del triángulo rectángulo y la función trigonométrica que los relaciona es la tangente, entonces:

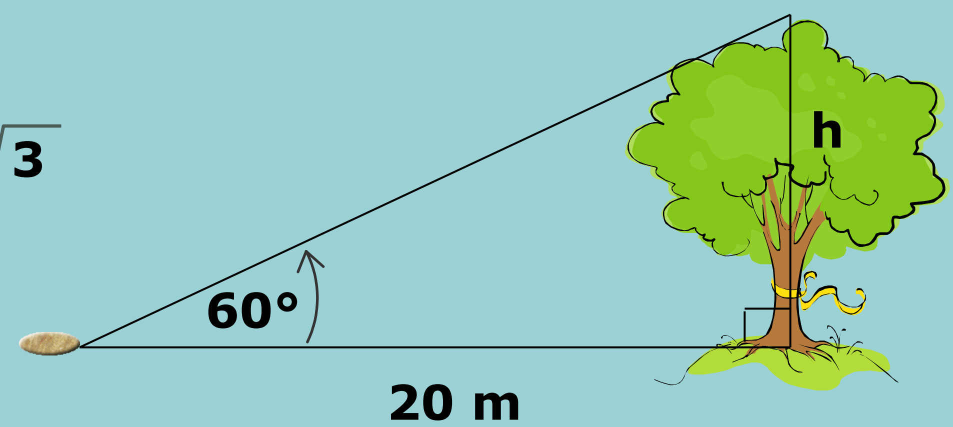
$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\Rightarrow \quad \text{tg}\ 60° = \frac{h}{20}$$

Pero la tg 60°= $\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{20}$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3} = h$$




Por lo tanto, la altura del árbol es $\sqrt{20}$ m

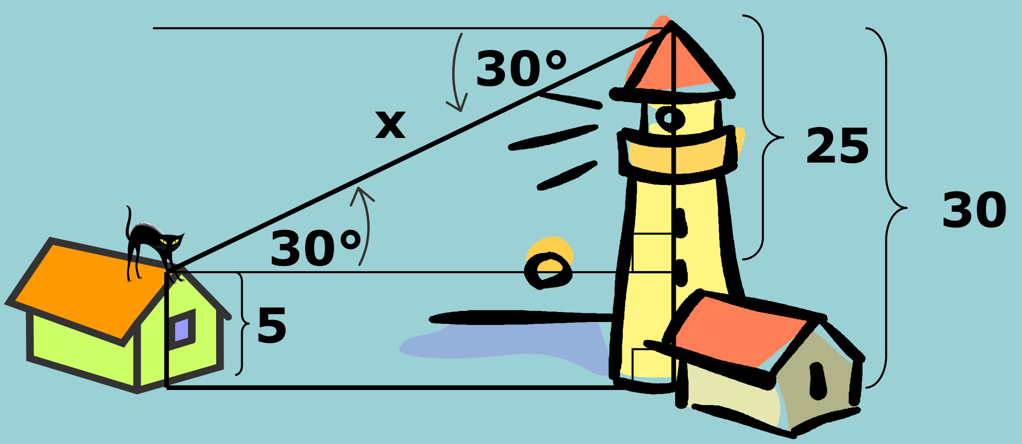
2. Una persona se encuentra en la parte superior de un faro de 30 metros de altura y observa un gato que se encuentra en el techo de una casa de 5 metros de altura, con un ángulo de depresión de 30º. ¿Cuál es la distancia entre el gato y la persona?

**Los datos que se tienen corresponden al cateto opuesto y a la hipotenusa, del triángulo rectángulo formado.**
**La función trigonométrica que los relaciona es el seno, entonces:**

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \Rightarrow \text{sen}\,30° = \frac{25}{x}$$

$$\text{Como sen}\,30° = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{25}{x}$$

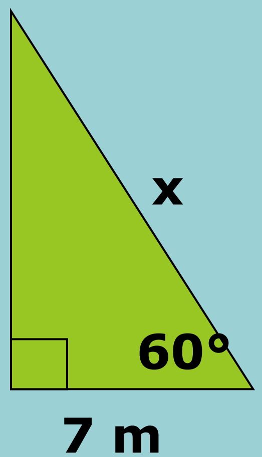
$$\Rightarrow x = 50 \text{ m}$$



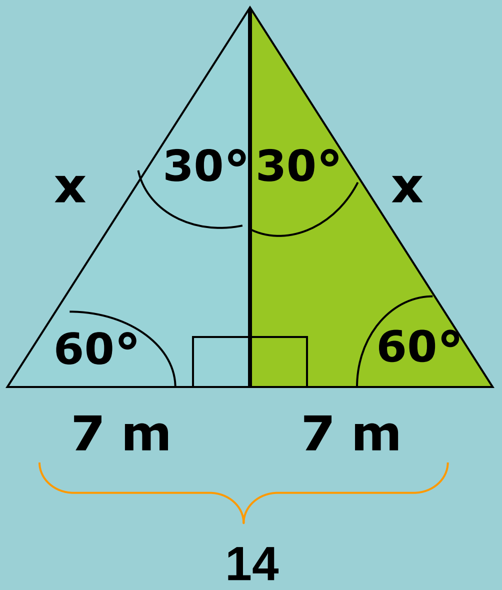
## Estrategia para la resolución de ejercicios

**Una persona que se encuentra a 7 metros de un árbol observa el alto de éste con un ángulo de elevación de 60°. Determine la distancia entre el observador y la punta del árbol.**

**El dibujo correspondiente es:**



**Los datos corresponden al cateto adyacente y a la hipotenusa del triángulo; la función trigonométrica que los relaciona es el coseno, sin embargo, no es necesario utilizarlo, ya que el triángulo corresponde a la mitad de un triángulo equilátero.**




**Entonces x = 14 metros.**