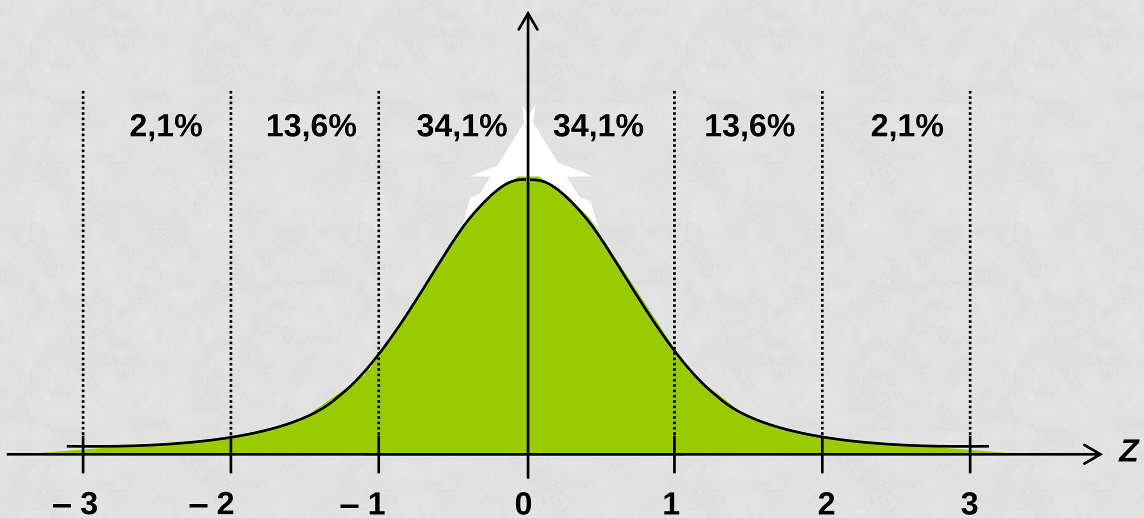
Distribución normal 1

Propiedades distribución normal

Distribución normal tipificada

Es una distribución estadística continua cuya función de densidad es **simétrica** , y cuya forma se denomina “campana de Gauss”.

Sea Z una variable estadística con distribución normal. Se dice que Z se distribuye de forma **normal tipificada** o **estandarizada** si la media, la moda y la mediana de la distribución son 0, y su desviación estándar es 1 $\Rightarrow$ Z ~ N(0, 1).

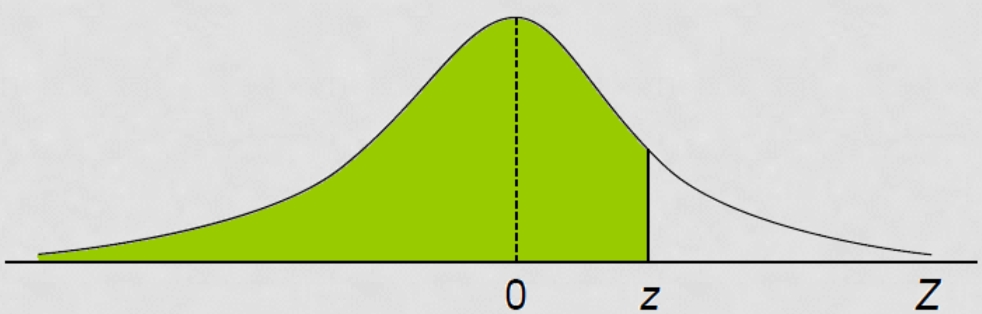


Propiedades distribución normal

Distribución normal tipificada

En una curva de distribución normal, las áreas por intervalo son muy difíciles de calcular, por lo cual existe una tabla en el que se indican sus valores aproximados, donde el área bajo la curva es equivalente a la **frecuencia relativa** de los datos menores o iguales que un determinado valor de z.

Aquí se presenta parte de ella $\Rightarrow$



z	*Área intervalo* $]-\infty, z]$
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995

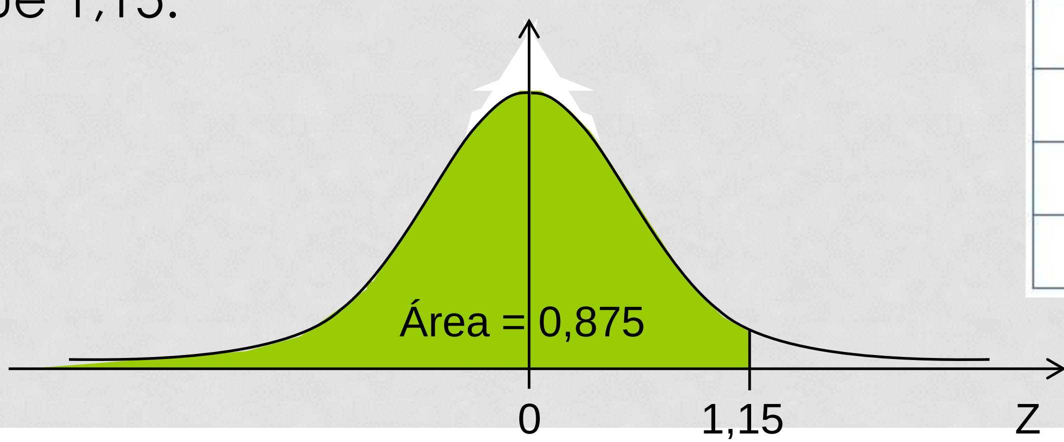
Propiedades distribución normal

Distribución normal tipificada

Ejemplo: Sea **Z** una variable estadística con distribución normal tipificada. Según la tabla, el área bajo la curva en el intervalo] – ∞; 1,15] es 0,875.

Esto significa que la frecuencia relativa de los valores de **Z** que son menores o iguales que 1,15 es 0,875. Es decir, el 87,5% de la población es menor o igual que 1,15.

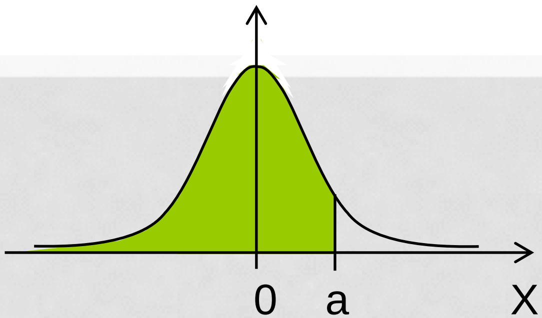
z	*Área intervalo*]– ∞, *z*]
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
$\boxed{1{,}15}$	$\boxed{0{,}875}$
1,28	0,900
1,64	0,950
1,96	0,975
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995

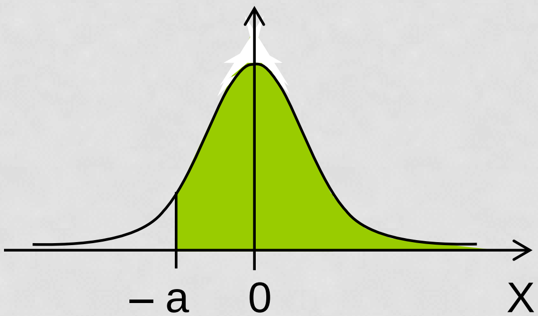


Propiedades distribución normal

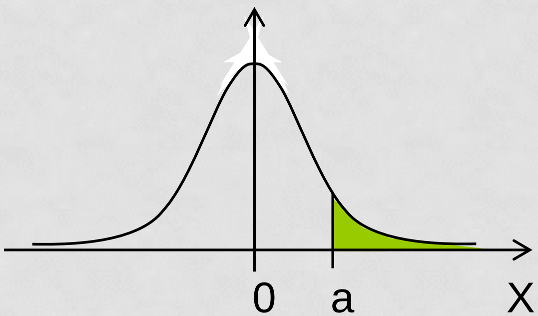
Propiedades

Sea **S** el área bajo la curva en el intervalo] – ∞, a]



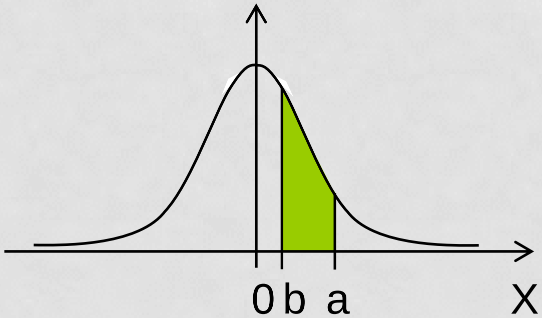


El área bajo la curva en el intervalo [– a, + ∞[también es **S**



El área bajo la curva en el intervalo [a, + ∞[es **(1 – S)**

Si el área en el intervalo] – ∞, a] es S y el área en el intervalo] – ∞, b] es R, entonces el área en el intervalo [b, a] es (S – R)



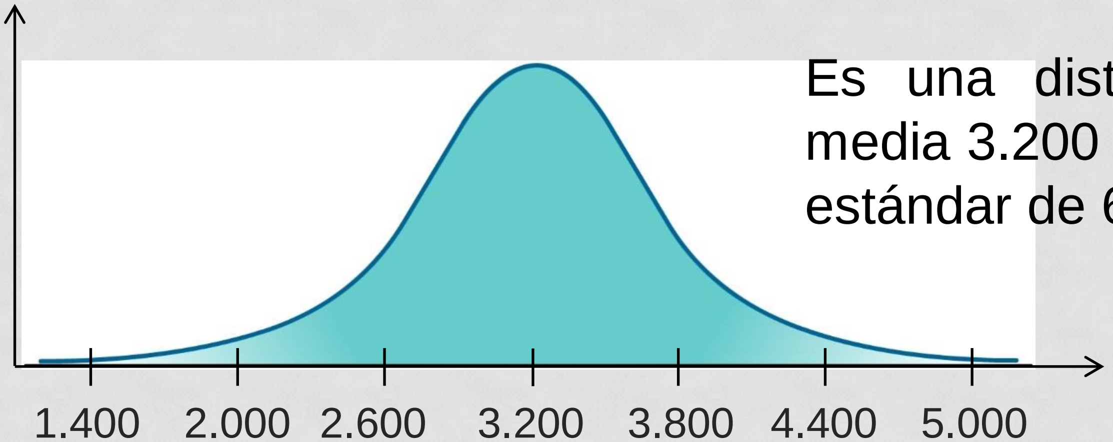
Propiedades distribución normal

Distribución normal no tipificada

En la vida cotidiana existen muchos parámetros estadísticos que al ser graficados con respecto a su frecuencia tienen un comportamiento “normal”: estatura, peso, cociente intelectual, etc.

Su gráfico tiene igual forma que la distribución normal tipificada, pero con distinta media y/o desviación estándar. Se llaman distribuciones normales **no tipificadas (o no estandarizadas).**

Por ejemplo, el gráfico adjunto muestra la distribución de las masas de recién nacidos, en gramos:



Es una distribución normal de media 3.200 gramos y desviación estándar de 600 gramos

Propiedades distribución normal

Distribución normal no tipificada

Si una variable estadística X se distribuye de manera normal, con media μ y desviación estándar σ, se puede **tipificar** usando una variable estadística Z que se distribuya de manera normal tipificada, mediante el cambio de variable:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

En el ejemplo anterior, como μ = 3.200 y σ = 600, entonces para los valores de X en la distribución se tiene que

$$Z = \frac{X - 3.200}{600}$$

es una variable estadística con distribución normal tipificada.

Este cambio de variable permite utilizar la tabla de áreas bajo la curva con cualquier distribución normal.

Propiedades distribución normal

Ejemplo

Las temperaturas ambientales de funcionamiento óptimo de los motores de una fábrica se distribuyen de manera normal, con media de 16 °C y desviación estándar de 4°C. ¿Qué porcentaje de los motores de la fábrica funcionan óptimamente con una temperatura mayor que 20 °C?

A) 84,1%

B) 20%

C) 35,1%

D) 15,9%

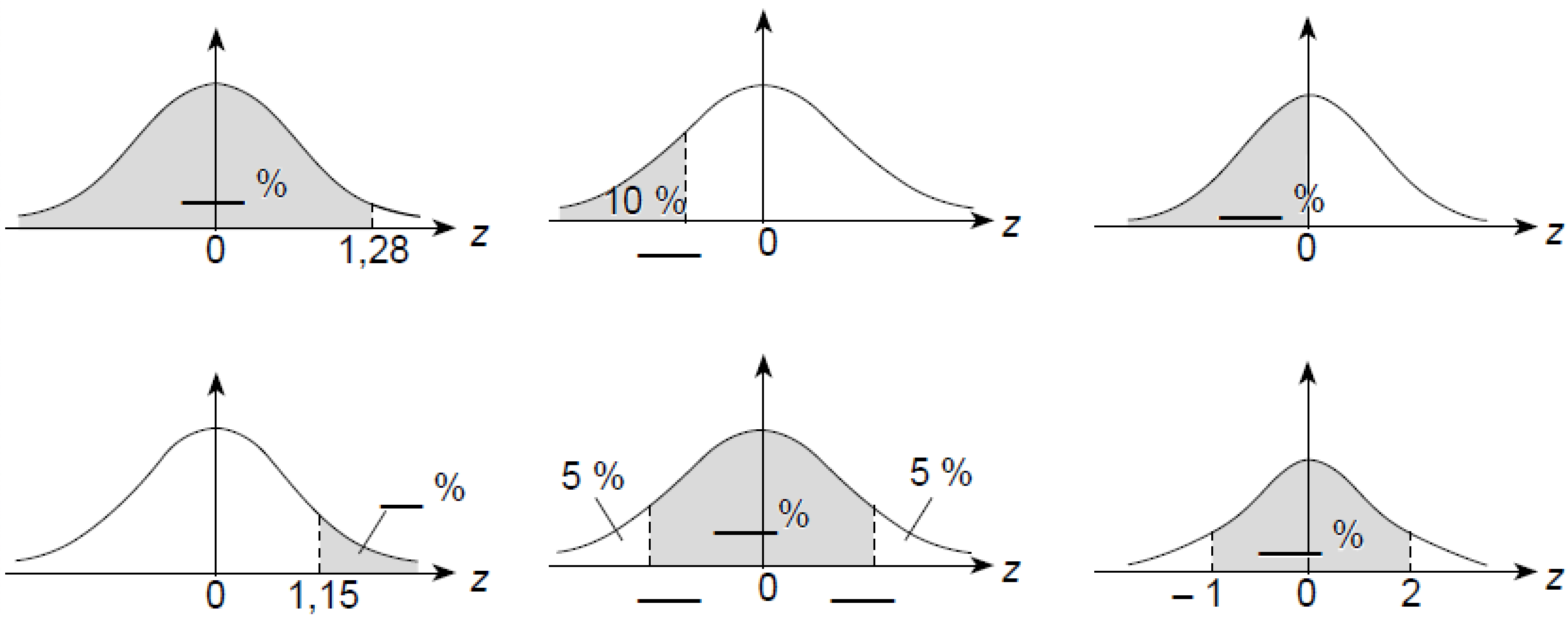
E) 90%

ALTERNATIVA CORRECTA

D

Estrategia de síntesis

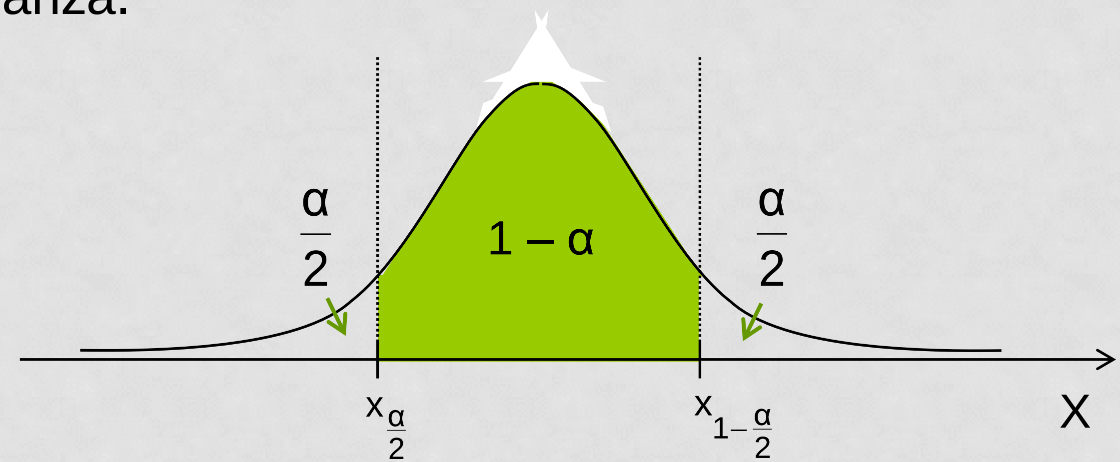
Utilizando la tabla de distribución normal tipificada adjunta al principio de esta guía, completa los siguientes gráficos correspondientes a distribuciones con comportamiento normal tipificado.



Intervalos de confianza

Definición

Sea **X** una variable estadística que se distribuye de forma normal en una cierta población, con desviación estándar σ. Si la población es muy grande resulta bastante difícil calcular la media μ de **X**. Sin embargo, si se saca una muestra de **X** de promedio $\overline{x}$, se puede determinar un **intervalo de confianza** dentro del cual se encuentre μ, con un cierto nivel de confianza.



α se conoce como el nivel de significancia y (1 – α) se conoce como el nivel de confianza.

Intervalos de confianza

Determinar intervalo de confianza

Sea una variable estadística que se distribuye normalmente en una población, con **media μ** y **desviación estándar σ.** Si se extrae una **muestra de n elementos**, donde el **promedio de la muestra** es $\overline{X}$, entonces con un **nivel de confianza** del **(1 – α)·100%** el valor de μ se encuentra en el intervalo [$\overline{X}$ – E, $\overline{X}$ + E].

E es el **error**, y se determina con la fórmula: $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el **coeficiente asociado al nivel de confianza**, y se determina con el procedimiento descrito a continuación…

Intervalos de confianza

Determinar intervalo de confianza

z	Área intervalo $]-\infty, z]$
0,67	0,749
0,99	0,839
1,00	0,841
1,15	0,875
1,28	0,900
1,64	0,950
$\boxed{1{,}96}$	$\boxed{0{,}975}$
2,00	0,977
2,17	0,985
2,32	0,990
2,58	0,995

Por ejemplo si el nivel de confianza es del 95%, entonces:

$$(1-\alpha)\cdot 100 = 95$$

$$(1-\alpha) = 0{,}95$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

Intervalos de confianza

Ejemplo

Los datos de una población se modelan mediante una distribución normal, con media μ y varianza 4. Se toma una muestra de esta población de tamaño 49, cuyo promedio es 57,5. Si de esta muestra se obtiene un intervalo de confianza para μ igual a [56,94; 58,06], ¿cuál de los siguientes valores es el coeficiente asociado al nivel de confianza de este intervalo?

A) 13,72

B) 0,98

C) 1,96

D) 0,56

E) 0,28

ALTERNATIVA CORRECTA

C

Pregunta oficial PSU

Un ingeniero de una fábrica debe inferir sobre el diámetro medio (μ) de los rodamientos de su producción, y para ello tomará una muestra al azar de rodamientos y la utilizará para construir un intervalo de confianza del 95% para μ. Si los diámetros de los rodamientos se modelan a través de una distribución normal, con varianza 4 mm^2, ¿cuál es el mínimo número de rodamientos que debe tener la muestra, para que el margen de error del intervalo construido sea menor o igual a 1 mm?

A) 62
B) 7
C) 11
D) 4
E) 16

ALTERNATIVA CORRECTA

E