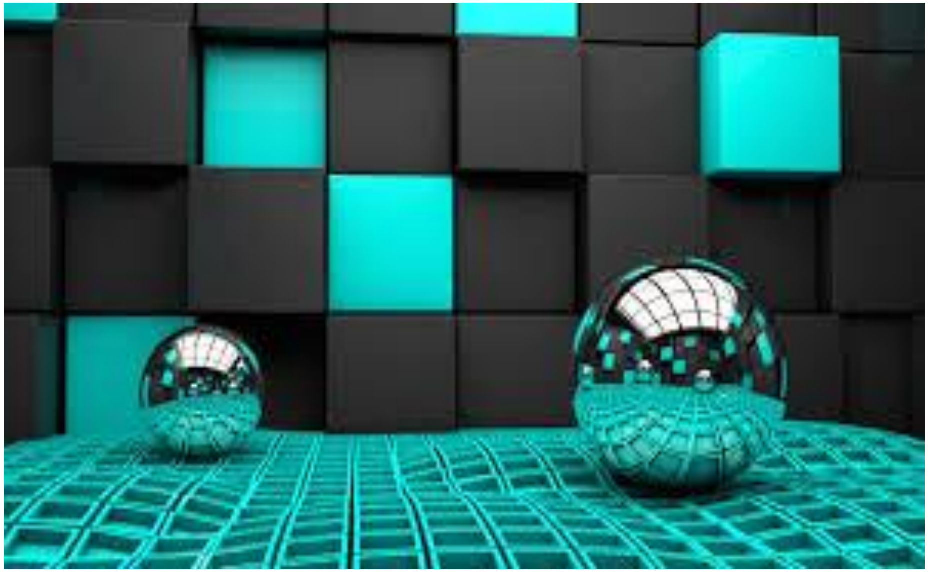
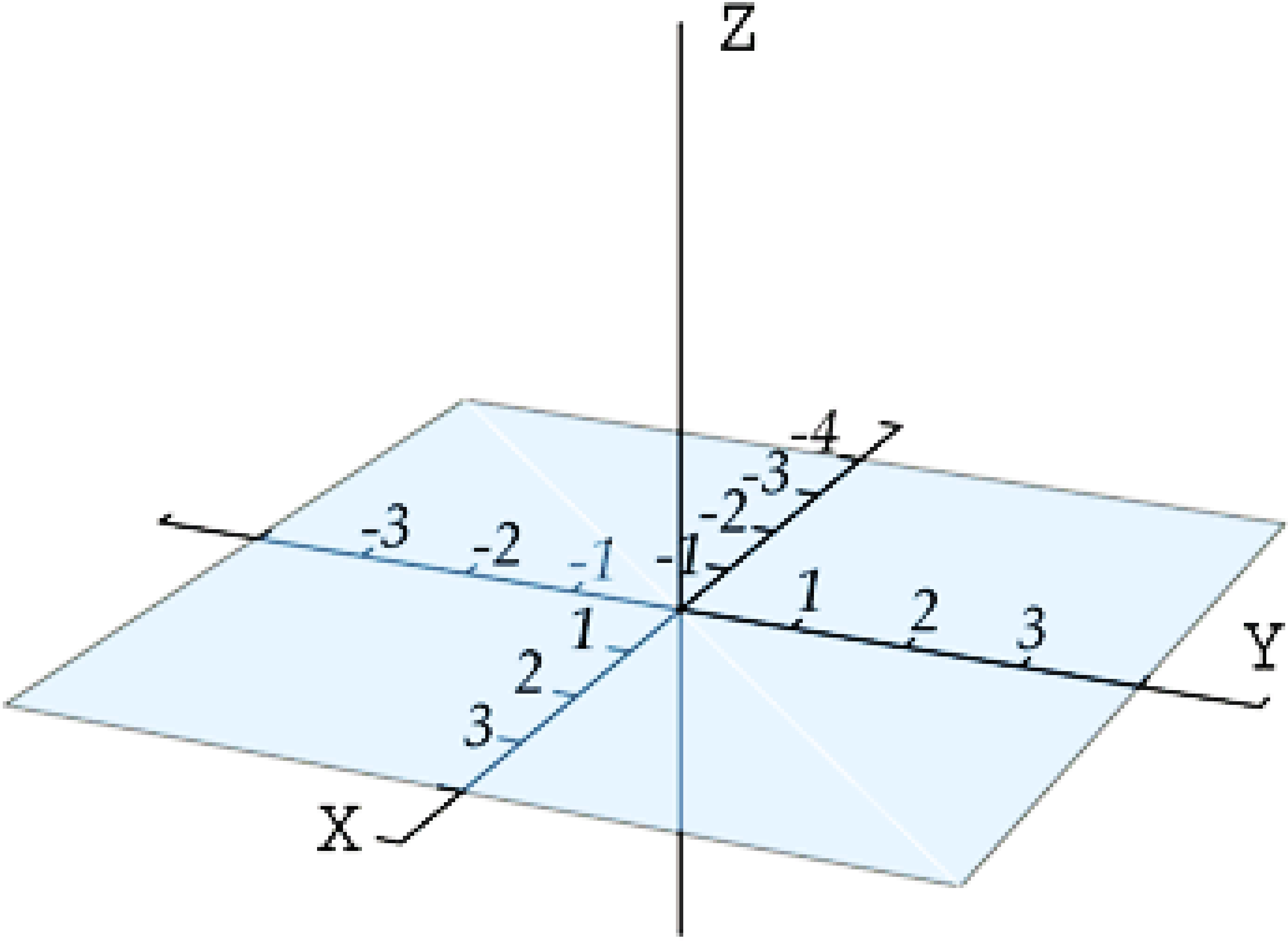
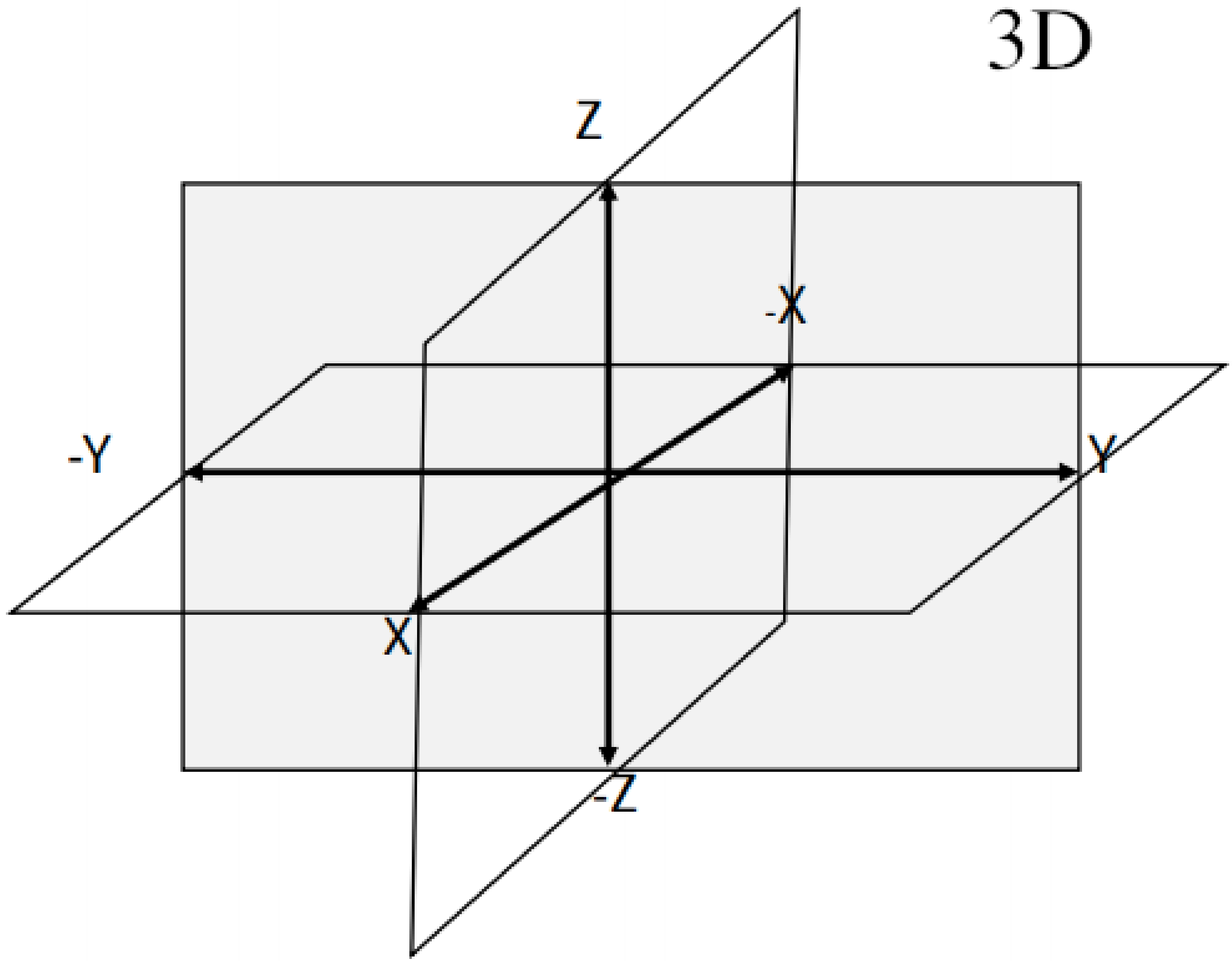
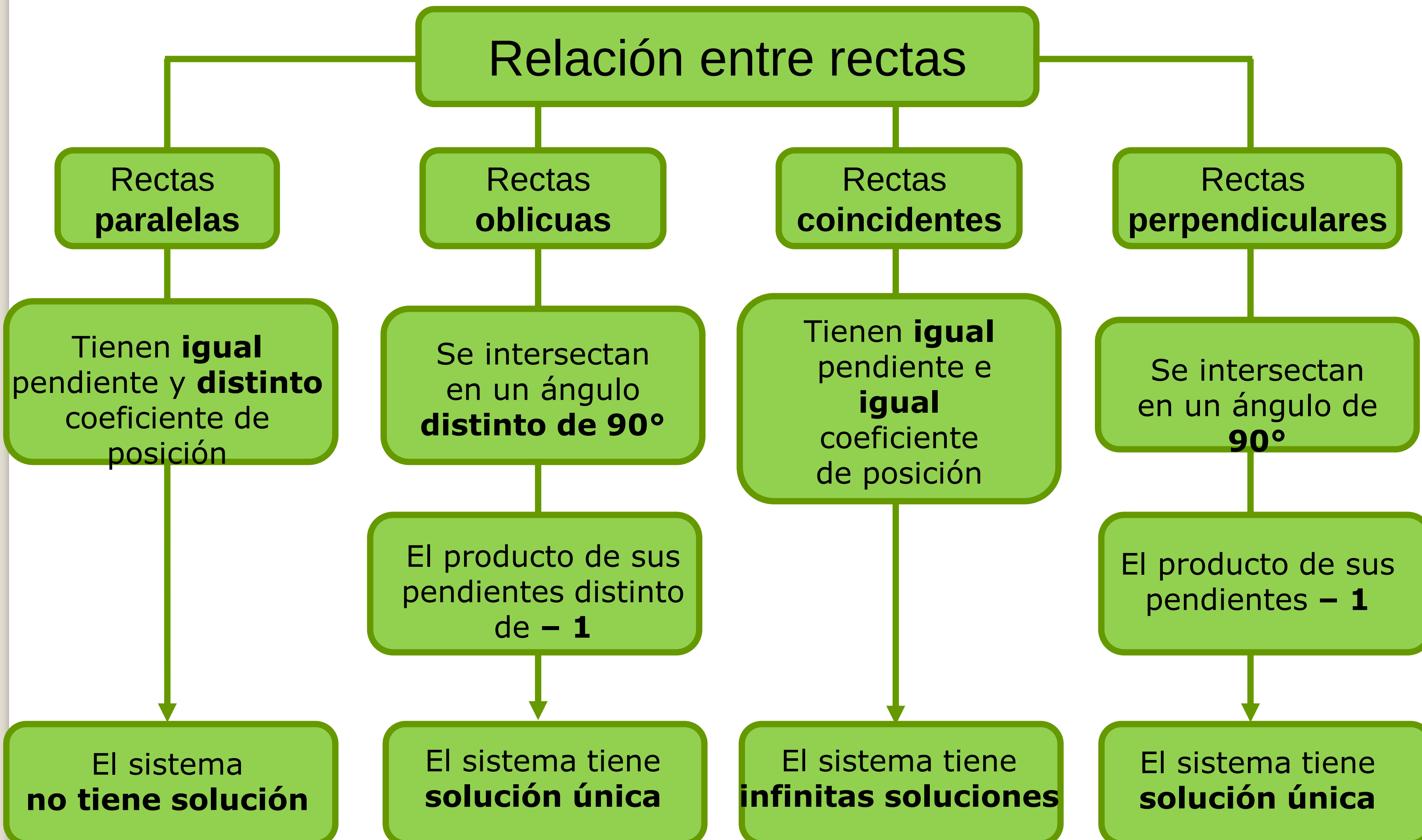
SISTEMA TRIDIMENSIONAL




Z
-4
-3
-2
-1
-3
-2
-1
1
2
3
1
2
3
Y
X


3D
Z
-X
-Y
Y
X
-Z

Repaso útil

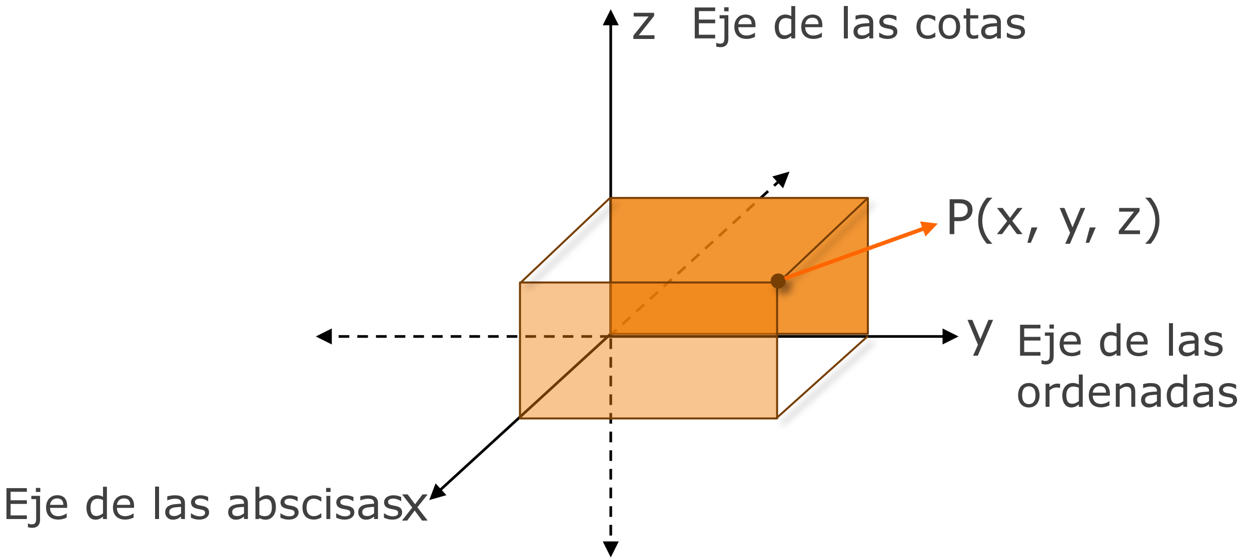


Relación entre rectas
Rectas **paralelas**
Rectas **oblicuas**
Rectas **coincidentes**
Rectas **perpendiculares**
Tienen **igual** pendiente y **distinto** coeficiente de posición
Se intersectan en un ángulo **distinto de 90°**
Tienen **igual** pendiente e **igual** coeficiente de posición
Se intersectan en un ángulo de **90°**
El producto de sus pendientes distinto de **– 1**
El producto de sus pendientes **– 1**
El sistema **no tiene solución**
El sistema tiene **solución única**
El sistema tiene **infinitas soluciones**
El sistema tiene **solución única**

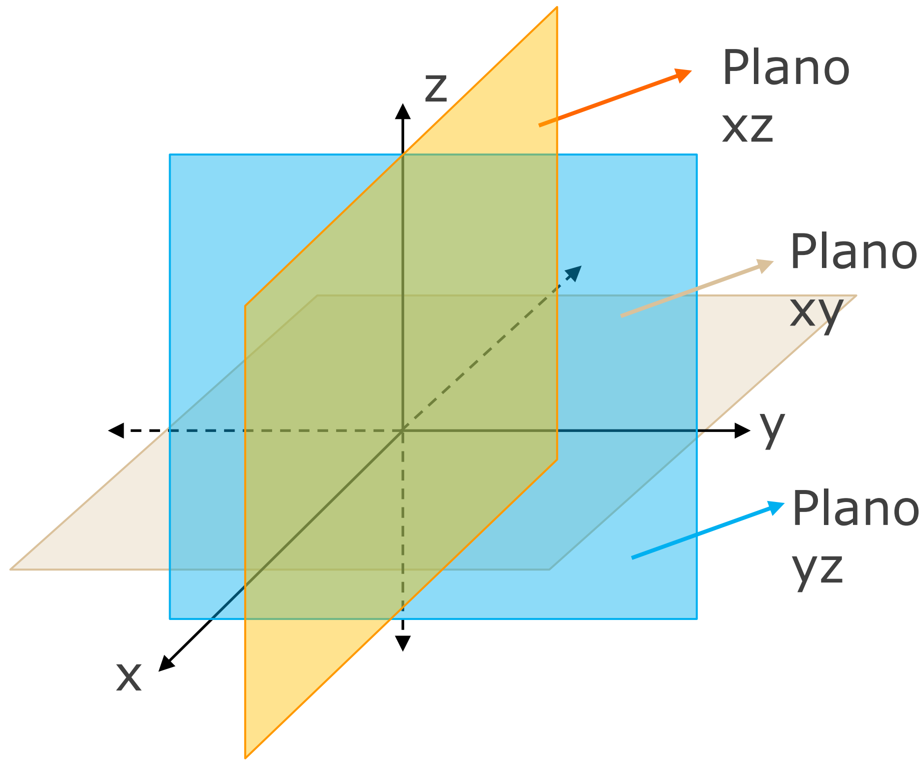
Sistema Tridimensional

Definición

Un **sistema de coordenadas tridimensional** se construye trazando un eje z, perpendicular en el origen de coordenadas a los ejes x e y.



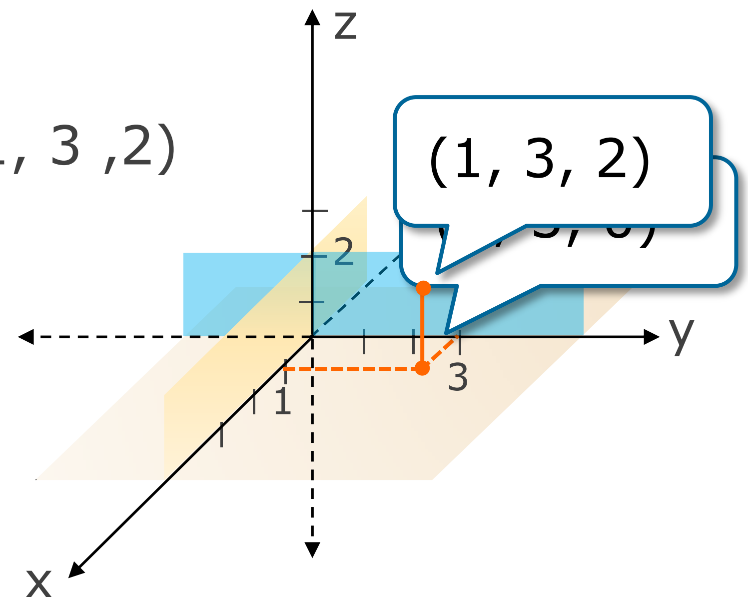
Los ejes determinan tres planos, el **plano xy**, el **plano xz** y el **plano yz**.



Para ubicar un punto (x, y, z) en el sistema tridimensional, podemos hacerlo ubicando primero su proyección en el plano xy, este es el punto (x, y, 0), y luego subir o bajar este punto z unidades, según el signo de z.

Ejemplo:

Representación del punto (1, 3 ,2)

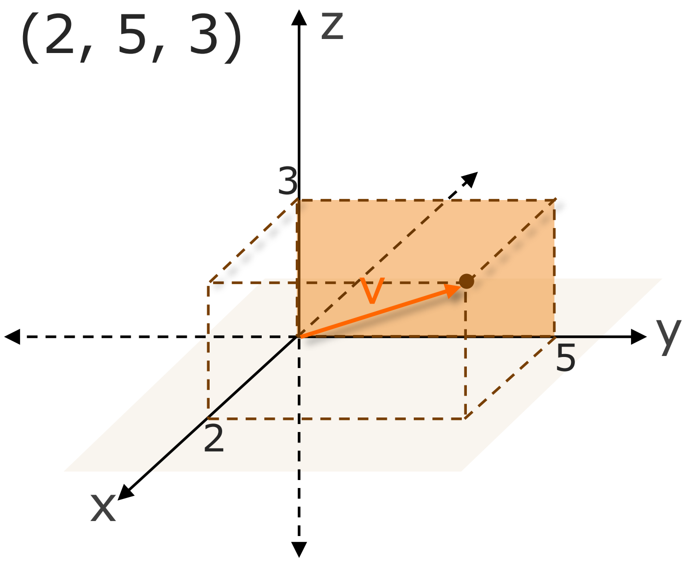


Vector en el espacio

Un vector en el espacio es cualquier segmento orientado que tiene su origen en un punto y su extremo en el otro.

Ejemplo:

Representación del vector $\vec{v}$ (2, 5, 3)



Módulo de un vector

El módulo de un vector es la longitud del segmento orientado que lo define, es un número siempre positivo (solamente el vector nulo tiene módulo cero).

$$\text{Si } \vec{v}(x, y, z) \Rightarrow \boxed{|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

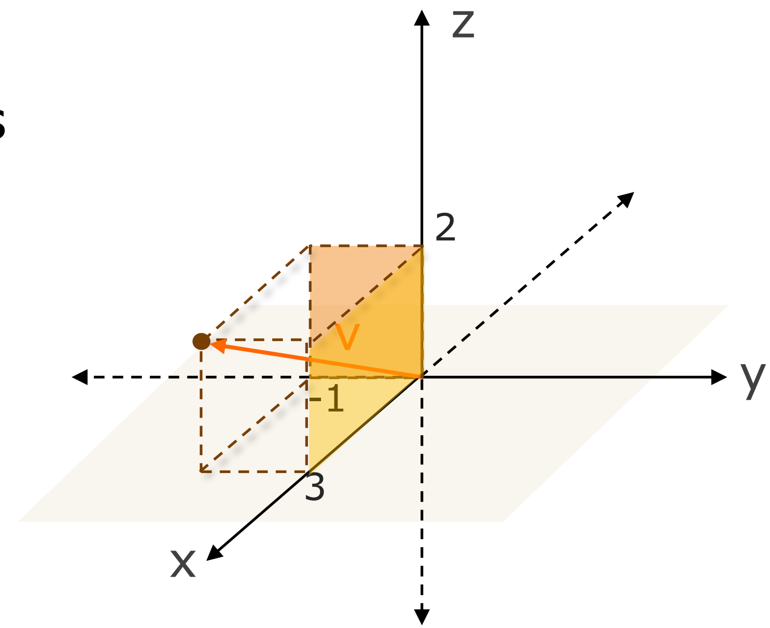
Ejemplo:

El módulo del $\vec{v}$ (3, – 1, 2) es

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 1 + 4}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{14}$$



Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que tiene de extremos dichos puntos.

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$,

$$\boxed{d_{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Ejemplo:

La distancia entre los puntos A(1, 2, 3) y B(– 1, 2, 0) es

$$d_{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (0-3)^2}$$

$$d_{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (-3)^2}$$

$$d_{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 0 + 9}$$

$$d_{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{13}$$

Coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$ en el espacio

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, entonces $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1)$

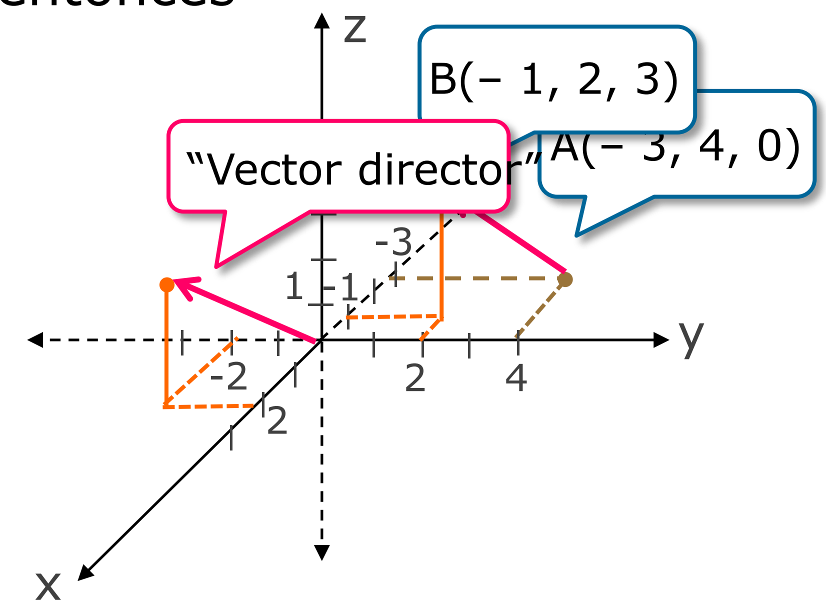
Ejemplo:

Si A(– 3, 4, 0) y B(– 1, 2, 3) entonces

$\overrightarrow{AB} = (-1-(-3)$

$\overrightarrow{BA} = (-2,\ 2, -1)$

$\overrightarrow{AB} = (2,\ -2,\ 3)$



Punto medio

Si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, el punto medio del segmento AB es

$$\boxed{M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)}$$

Ejemplo:

Si A(– 3, 4, 0) y B(– 1, 2, 1) entonces

$$M=\left(\frac{-3+(-1)}{2},\frac{4+2}{2},\frac{0+1}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{-4}{2},\frac{6}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$M=\left(-2,3,\frac{1}{2}\right)$$

Ecuación de la recta en el espacio

Ecuación vectorial

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, la ecuación vectorial de la recta Que pasa por los puntos A y B es

$$\boxed{(x, y, z) = A + t(B - A)} \quad \text{ó} \quad \boxed{(x, y, z) = B + t(A - B)}$$

*(Con **t** en los reales)*

Ejemplo:

Si A(– 1, 1, 3) y B(1, 2, 0), la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B es

$$(x, y, z) = C + t(B - C)$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + t((1,2,0) - (-1,1,3))$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + t(2,1,-3)$$

Ecuación de la recta en el espacio

Ecuaciones paramétricas

Si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, entonces

$$\boxed{x = x_1 + t(x_2 - x_1)}$$

$$\boxed{y = y_1 + t(y_2 - y_1)}$$

$$\boxed{z = z_1 + t(z_2 - z_1)}$$

*(Con **t** en los reales)*

Ejemplo:

Si A(– 1, 1, 3) y B(1, 2, 0) entonces la ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B es $(x, y, z) = (-1,1,3) + t(2,1,-3)$

Luego, las ecuaciones paramétricas son

$$x = -1 + t(1 - (-1)) \qquad x = -1 + 2t$$

$$y = 1 + t(2 - 1) \qquad y = 1 + t$$

$$z = 3 + t(0 - 3) \qquad z = 3 - 3t$$

Ecuación de la recta en el espacio

Ecuación continua

Si $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$, entonces $\boxed{\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}=t}$

*(Con **t** en los reales)*

Ejemplo:

Si A(– 1, 1, 3) y B(1, 2, 0), entonces la ecuación continua de la recta que pasa por A y B es

$$\frac{x-(-1)}{1-(-1)}=\frac{y-1}{2-1}=\frac{z-3}{0-3}$$

$$\frac{x+1}{2}=y-1=\frac{3-z}{3}$$

Pregunta oficial PSU

53. Dado el triángulo de vértices A(3, 0, 0), B(–1, 4, 0) y C(–1, 1, 3), ¿cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una ecuación de la recta que pasa por el vértice C y por el punto medio de AB ?

A) $\frac{x+1}{2} = y - 1 = \frac{3-z}{3}$

B) $-x + 2 = y - 2 = \frac{z}{3}$

C) $x + 2 = \frac{y+1}{2} = z - 3$

D) $x + 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{3}$

E) Ninguna de las anteriores.

ALTERNATIVA CORRECTA

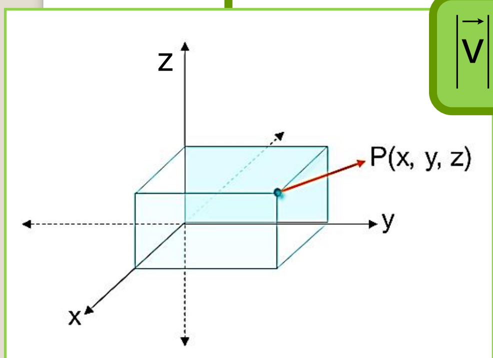
A

*Fuente : **DEMRE - U. DE CHILE**, Proceso de admisión 2016.*

A modo resumen:

Sistema tridimensional

Vector en el espacio



x : abscisa
y :ordenada
z: cota

Módulo de un vector

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Distancia entre dos puntos

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$

$$d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ecuación vectorial

$$(x, y, z) = A + t(B - A)$$

Punto medio

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$